

LE RISQUE OPERATIONNEL

1- INTRODUCTION

Le risque opérationnel est un concept mal défini ; dans le cas d'une institution financière, il est même défini par une non-définition : il se réfère aux pertes qui ne sont reliées ni au marché, ni au risque de crédit. Ces pertes sont dues par exemple à une panne du système informatique, un bug dans un logiciel, une erreur de jugement, une fraude, etc... Afin de mieux cerner cette notion, une typologie des risques opérationnels est nécessaire ; toutefois ceci est en dehors du cadre de cette étude.

Une question des plus importantes est la quantification du risque opérationnel. Par exemple la quantification de la perte espérée (Expected Loss EL) nécessite la connaissance de la loi de probabilité des dates de survenance d'une perte opérationnelle, ainsi que de la loi de l'amplitude de la perte elle-même. Cette démarche est délicate car une panne informatique n'a que peu de point commun en probabilité et en gravité avec la même panne il y a 10 ans.

Les pertes opérationnelles ont plusieurs caractéristiques : premièrement, elles surviennent à des dates aléatoires ; deuxièmement, il s'agit souvent de grosses pertes ; enfin, il est impossible de trouver les outils de couverture sur les marchés financiers. Ces pertes peuvent être vues comme des dommages subis par l'entreprise, et l'achat d'une protection contre ces pertes est perçu comme une opération d'assurance. Il est par exemple possible de s'assurer contre des pertes causées par une panne informatique. La problématique du risque opérationnel pour toute entité industrielle en général et les banques en particulier se rapporte donc à une problématique d'assurance. C'est pourquoi, nous allons nous placer dans le cadre théorique de l'assurance afin d'aborder efficacement le risque opérationnel.

La modélisation du processus de pertes opérationnelles repose sur les processus de Poisson composés ; il s'agit d'un processus de Poisson dont l'amplitude des sauts est aléatoire et a une fonction de répartition donnée. Ces processus possèdent de nombreuses propriétés mathématiques, et en particulier, il est possible d'en extraire des résultats asymptotiques sur les probabilités de franchir un certain seuil. Dans ce qui suit, nous modélisons les pertes opérationnelles par un processus de Poisson composé et la théorie mathématique du risque permet d'obtenir le probabilité de ruine à temps infini. Ce résultat est intéressant puisque, si on se fixe un seuil de confiance, il est possible de déduire le capital à allouer au risque opérationnel pour absorber les pertes opérationnelles à ce niveau de probabilité. Toutefois cette analyse asymptotique s'avère insuffisante lorsqu'on souhaite raisonner

à horizon fini, d'autant plus que le régime asymptotique n'est atteint qu'au bout d'un temps très long. Enfin, une étude numérique des probabilités de ruine à horizon fini nous permettra d'évaluer des produits indexés sur le risque opérationnel.

Le plan de cette étude est le suivant :

- La théorie du risque
- Exigence en capital
- Applications numériques
- Dérivés opérationnels

2- LA THEORIE DU RISQUE

Dans ce paragraphe, nous introduisons les résultats mathématiques relatifs au problème de la ruine sous des hypothèses de queues épaisses. Ceci nous semble constituer le cadre d'analyse pertinent pour aborder le risque opérationnel du point de vue quantitatif. La théorie du risque remonte à Lundberg qui a réalisé l'importance des processus de Poisson dans les modèles d'assurance IARD. Cramér a posé les fondations d'une analyse probabiliste des problèmes d'assurance, et toutes ces contributions sont cristallisées dans le modèle de Cramér-Lundberg. Ce modèle repose sur les processus Poisson-composés.

- Les valeurs des sinistres sont des variables aléatoires (X_k) positives de même fonction de répartition F , d'espérance $\mu > 0$.
- Les sinistres apparaissent à des dates aléatoires $0 < T_1 < T_2 < \dots$
- Le nombre de sinistres entre les dates 0 et T est noté :

$$N(t) = \sup[n \geq 1 : T_n \leq t], \quad t \geq 0.$$

- Les durées entre deux sinistres, notées $Y_k = T_k - T_{k-1}$ sont des variables aléatoires iid distribuées selon la loi exponentielle avec une espérance égale à $1/\lambda$.
- Les dates d'arrivée de sinistres et les amplitudes des sinistres sont des variables aléatoires indépendantes entre elles.
- Le processus de perte totale à une date t est défini par :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

- Le processus de risque est la différence entre le total des primes reçues jusqu'à une date donnée et le total des sinistres à cette date :

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

Dans cette équation, u désigne le capital initial et c est le taux linéaire de prime.

Dans le modèle de Cramér-Lundberg, une quantité est particulièrement importante : il s'agit de la probabilité de ruine :

$$\psi(u) = P[\exists t > 0 : U(t) < 0]$$

Posons $\rho = c/(\lambda\mu) - 1 > 0$. Cette inégalité est une condition de profit net. En terme de risque opérationnel, elle exprime que le risque espéré est bien couvert. En posant $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, on prouve :

$$\psi(u) \approx \frac{1}{\rho\mu} \int_u^{\infty} \bar{F}(y) dy$$

Notons que cette quantité est à rapprocher d'une quantité fréquemment évoquée en assurance : l'indice des grands sinistres. Cet indice relie la plus grande perte à la somme de toutes les pertes subies via la loi de distribution de l'amplitude des pertes. Par intégration par parties, et en introduisant la fonction quantile F^{\leftarrow} , on obtient :

$$\psi(u) = \frac{1}{\rho\mu} u \bar{F}(u) + \frac{1}{\rho\mu} \int_{F(u)}^1 F^{\leftarrow}(y) dy$$

La probabilité de faillite est composée de deux termes. Le premier est la contribution des événements non extrêmes qui, lorsqu'ils sont répétés engendrent la faillite. Le second terme est précisément égal à l'indice des grands sinistres :

$$D_F(p) = \frac{1}{\mu} \int_{1-p}^1 F^{\leftarrow}(y) dy$$

Cet indice $D_F(p)$ mesure l'importance avec laquelle les $100.p$ % plus grandes pertes contribuent au total des pertes. Nous voyons ici que la probabilité de faillite est grande par rapport à $1-F(u)$, ce qui a pour conséquence de démontrer l'assertion du quantile.

3- EXIGENCE EN CAPITAL

Dans ce paragraphe, nous allons calculer une allocation en capital pour couvrir avec un certain degré de confiance les pertes opérationnelles sur un horizon infini. Si nous appelons p ce seuil, le capital à allouer satisfait l'équation :

$$\psi(u) = p$$

Nous pouvons voir cela sous l'angle de la facturation d'une compagnie d'assurance qui assumerait une partie de ce risque opérationnel. Si on souhaite atteindre un niveau de confiance q , la prime versée au réassureur est :

$$\psi^{-1}(q) - \psi^{-1}(p)$$

Cette approche soulève néanmoins un commentaire. La prime d'assurance est généralement versée en différentes annuités et non pas en une seule prime, ce qui constituerait un montant généralement trop élevé : on n'assure pas son véhicule pour toute la vie, mais on renouvelle son contrat chaque année. Ici, on trouve la prime annuelle x_0 en utilisant le taux d'intérêt de long terme dans l'équation :

$$\psi^{-1}(q) - \psi^{-1}(p) = x_0 \sum_{T=0}^{\infty} e^{-rT} \approx x_0 / r$$

Dans le cas d'une distribution à queue épaisse (ce qui est dans nos hypothèses), on a :

$$\psi(u) \approx \frac{1/\xi - 1}{\rho\mu} u^{1-1/\xi}$$

La probabilité de faillite décroît donc en loi de puissance avec le capital alloué au risque opérationnel. Inversement, la prime de réassurance croît en puissance de la probabilité de faillite désirée.

4- SIMULATIONS NUMERIQUES

Nous réalisons dans ce paragraphe des applications numériques. A cet effet, nous devons préciser la loi de distribution de l'amplitude des pertes, ainsi que la loi des dates auxquelles ces pertes sont enregistrées. Afin d'obtenir des résultats réalistes, nous supposons que l'intervalle de temps entre deux pertes est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=1\text{an}$. En ce qui concerne la loi de l'amplitude des pertes, nous utilisons les résultats de dommages automobiles de Winterthur disponible sur leur site internet et repris par Schmock. Nous supposons ici que l'amplitude des pertes suit une loi de Pareto, et cette base de données de Winterthur nous permettra d'obtenir un exposant de queue réaliste. Nous choisirons ensuite les paramètres de localisation et d'échelle.

$$\xi = -1/1.38$$

Il est important de remarquer que si la fonction de répartition est une loi de Pareto :

$$\bar{F}_\alpha(x) = \left(\frac{\kappa}{\kappa + x} \right)^\alpha$$

alors cette loi est dans le domaine d'attraction : $F_\alpha \in MDA(H_{-1/\alpha})$. On en déduit donc $\alpha = 1.38$. L'espérance de perte μ s'écrit alors :

$$\mu = \frac{\kappa}{\alpha - 1}$$

Si nous choisissons par exemple $\kappa=1$ MF, l'espérance de perte sera de $\mu=2.63$ MF. Le capital u à allouer afin d'atteindre un seuil de confiance p dans le cadre d'hypothèses décrit ci-dessus est :

$$u = \kappa \left[(\rho p)^{-\frac{1}{\alpha-1}} - 1 \right]$$

Le tableau ci-dessous donne des valeurs numériques de ce capital économique en fonction du paramètre ρ et du seuil de probabilité retenu.

Table 1 - Capital alloué en fonction du profit net moyen (ρ) et du seuil de probabilité (p)

		Profit net moyen								
		0.05	0.1	0.2	0.5	1	2	3	5	10
Seuil de probabilité	0.10%	2.1E+11	3.4E+10	5421651404	486318779.4	78475996.04	12663466.58	4356668.3	1135904.2	183297.1
	0.50%	3013736238	486318779.4	78475996.04	7039247.4	1135904.2	183297.1	63059.9	16440.7	2652.2
	1%	486318779.4	78475996.04	12663466.58	1135904.2	183297.1	29577.3	10175.0	2652.2	427.1
	2%	78475996.0	12663466.58	2043469.8	183297.1	29577.3	4772.0	1641.1	427.1	68.1
	5%	7039247.4	1135904.2	183297.1	16440.7	2652.2	427.1	146.3	37.4	5.2
	10%	1135904.2	183297.1	29577.3	2652.2	427.1	68.1	22.8	5.2	0.0
	20%	183297.1	29577.3	4772.0	427.1	68.1	10.1	2.8	0.0	0.0

Dans cette étude, nous insistons sur le fait que la ruine peut bien entendu être causée par une succession de pertes opérationnelles. Toutefois, il est intéressant de se poser la question de la fréquence moyenne de survenance d'une perte donnée. En première approximation, la fréquence de survenance d'une perte supérieure à un seuil x est égale à la fréquence de chaque perte multipliée par la probabilité d'une perte supérieure au seuil x . La fréquence de perte au delà d'un seuil est donc approximativement $\lambda \bar{F}(x)$. Dans la figure 1 nous traçons le seuil de perte opérationnelle en fonction de la fréquence.

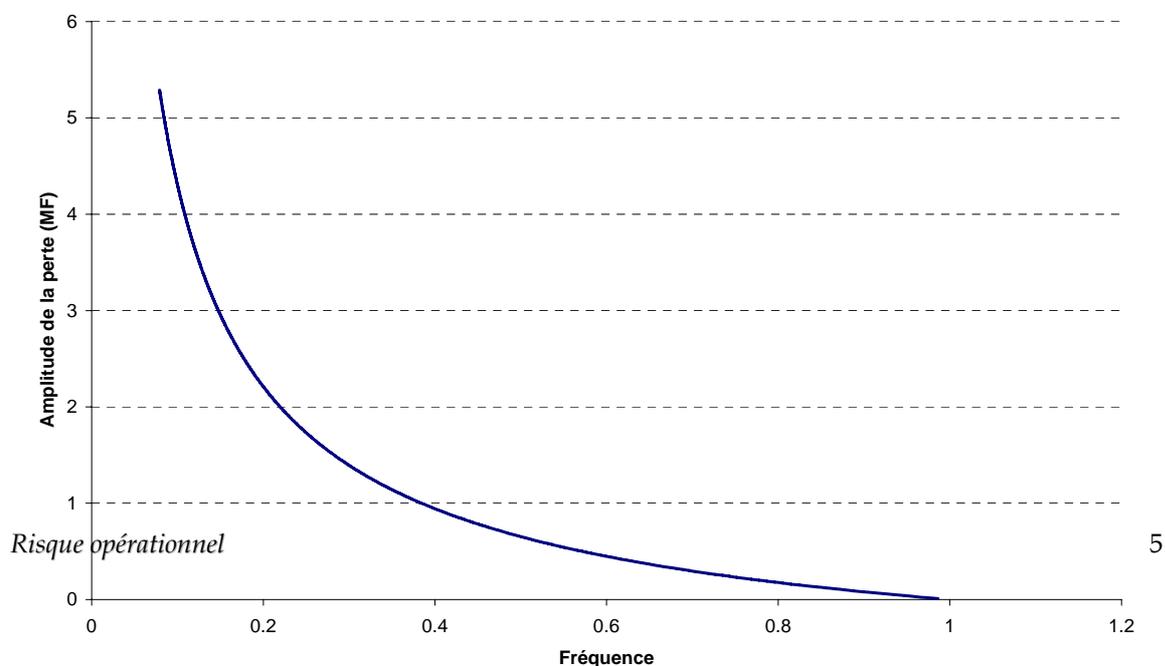


Figure 1 - Amplitude des pertes en fonction de la fréquence

Nous constatons que la fréquence des pertes est bornée à un événement par an, ce qui est normal compte tenu de notre modélisation à partir du processus de Poisson composé. Par ailleurs, on constate numériquement qu'une perte de 2 MF (deux fois la perte moyenne) surviendra tous les 5 ans environ. Ceci permet aux responsables du risque opérationnel de mieux visualiser le dilemme entre amplitude et fréquence des pertes.

5- PERTES SUR UN HORIZON FINI

5.1 Impact de l'horizon fini

La convergence de la probabilité de ruine vers le régime asymptotique est extrêmement lente, ce qui rend l'étude ci-dessus à horizon de temps infini un peu décevante. Pour allouer du capital sur un horizon de temps fini, pour calculer une prime annuelle de réassurance ou pour évaluer les produits dérivés sur le risque opérationnel, il est très important d'estimer la probabilité de faillite sur un horizon fini. Nous avons vérifié par des simulations numériques que la probabilité de faillite tend extrêmement lentement vers sa valeur limite $\psi(u)$. Nous notons $\psi(u, T)$ cette probabilité :

$$\psi(u, T) = P\left(\inf_{0 \leq t \leq T} U(t) < 0\right)$$

Embrecht et al. montrent que l'on a le résultat suivant lorsque la distribution des pertes décroît en loi de puissance :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u, uT)}{\psi(u)} = 1 - (1 + c(1 - \psi(0))T)^{-1/\xi}$$

Ce résultat prouve la lente croissance de la probabilité de faillite en un temps fini vers sa limite de temps infini. Cela se confirme numériquement par des simulations numériques pour lesquelles nous avons retenu la valeur $\rho=3$ et les caractéristiques des lois des dates de pertes opérationnelles et de leurs amplitudes sont identiques à celles choisies dans la section 5. Nous avons réalisé 500 000 simulations de trajectoires de processus de Poisson composés. Sur la figure 2, nous avons représenté les courbes de la probabilité de faillite en fonction de l'horizon pour trois valeurs du capital initial u (20, 30 et 40 respectivement).

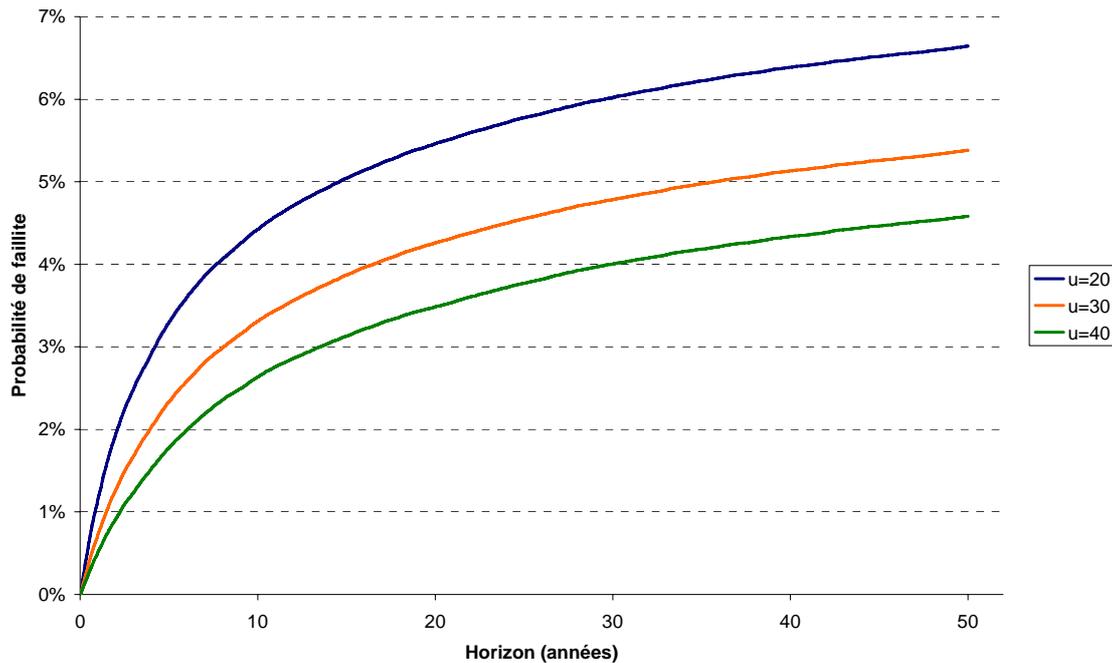


Figure 2 - Probabilité de faillite à horizon fini

Ainsi, cette étude permet d'évaluer le capital à allouer si on se fixe un seuil de probabilité de ruine à un horizon fini donné. Si on note T cet horizon, le capital à allouer pour couvrir les pertes opérationnel à un seuil de probabilité p est donné par l'équation :

$$\psi(u, T) = p$$

Nous ne disposons pas de formule pour la probabilité de ruine à horizon fini, ce qui impose donc de résoudre cette équation numériquement.

Le problème de la réassurance est tout à fait similaire, et l'impact de l'horizon fini est d'autant plus important que les primes sont versées annuellement à l'assureur. Comme dans le cas de l'assurance dommages, la survenance de pertes opérationnelles va mécaniquement engendrer une hausse de la prime de réassurance si le capital alloué pour couvrir les risques sur l'année suivante a fondu à cause de ces pertes. Si à une date donnée, la société décide d'assumer les pertes opérationnelles correspondant à un seuil q et souhaite se réassurer pour toutes les pertes correspondant à un seuil de confiance p , la prime annuelle ($T=1$ an) de réassurance s'écrit :

$$\psi^{-1}(q, T) - \psi^{-1}(p, T)$$

5.2 Dérivés sur risque opérationnel

Certains professionnels de grands groupes financiers croient au développement de produits dérivés sur le risque opérationnel. Ces produits dérivés offrirait ainsi des instruments de couverture du

risque opérationnel, au même titre que les *catastrophe bonds* permettent à la société d'assurance qui émet ces obligations de se couvrir contre des pertes exceptionnelles dues à certaines catastrophes (tempêtes, tremblements de terre,...). Ces dérivés sur perte opérationnelle prendraient la forme de swaps ou d'obligation à options attachées. Dans l'exemple d'une émission indexée sur le risque opérationnel de l'émetteur, une banque émet une obligation dont le principal n'est pas remboursé si un perte opérationnelle d'une nature déterminée à l'avance survient avant la maturité de l'émission. Une institution financière pourrait trouver dans ce type d'émission plusieurs avantages par rapport à la souscription d'un simple contrat d'assurance. Tout d'abord, lorsque la perte opérationnelle survient, la société détient déjà les fonds correspondant au principal de l'émission et n'a donc pas à attendre l'expertise et l'indemnisation de l'assureur. Dans certains cas, il peut s'avérer crucial pour la société d'éviter les problèmes de trésorerie. Par ailleurs, comme dans le cas des catastrophe bonds, le recours à ce type de protection peut être moins coûteux qu'un contrat d'assurance.

Le prix des obligations indexées sur le risque opérationnel est directement relié à la probabilité de faillite. Toutefois, ces obligations ont une maturité de quelques années, quelques dizaines d'années tout au plus. Ainsi, l'étude ci-dessus permet d'évaluer les produits dérivés du risque opérationnel, comme par exemple des émissions obligataires dont les tombées de coupons seraient conditionnées à la non survenance de certaines pertes opérationnelles. On peut par exemple imaginer une obligation zéro-coupon dont le nominal ne serait pas remboursé en cas de faillite due à des pertes opérationnelles ou dans le cas où une perte supérieure à un montant donné surviendrait pendant la vie du produit. Nous allons traiter ces deux exemples successivement.

Considérons une obligation zéro-coupon de maturité T dont le remboursement est conditionné à la non faillite de la société d'ici la maturité. Si nous supposons que le risque de faillite est essentiellement dû au risque opérationnel, le prix de cette obligation est :

$$B(0, T) = [1 - \psi(u, T)] e^{-R(T)T}$$

où $R(T)$ est le taux sans risque correspondant à la maturité T . Cette relation permet d'en déduire une structure par terme des spreads dus au risque opérationnel.

Dans le deuxième exemple, nous considérons une obligation très analogue aux *Cat Bonds* émises par les compagnies d'assurance. Cette obligation que l'on peut appeler *Op Bond* est un zéro-coupon dont le remboursement à la maturité T n'a lieu que si aucune perte opérationnelle supérieure à un certain seuil n'a été enregistrée pendant la vie du produit. Entre la date initiale et l'échéance T , le nombre de pertes opérationnelles suit un processus de Poisson, et chaque perte a une fonction de répartition F . Après calculs, la probabilité que le seuil s soit dépassé par au moins une des pertes opérationnelles entre les dates initiale et T est :

$$P(s, T) = \exp \left\{ \left[\left(\frac{\kappa}{\kappa + s} \right)^\alpha - 1 \right] \lambda T \right\}$$

Ainsi le prix de l'*Op Bond* est

$$B(0, T) = [1 - P(s, T)]e^{-R(T)T}$$

Ces deux exemples illustrent parfaitement le fait que les produits dérivés sur le risque opérationnel sont très analogues à des produits déjà existant, à savoir la dette privée et les *Cat Bonds*.

6- CONCLUSION

La théorie du risque constitue un cadre d'analyse adapté à l'étude du risque opérationnel. Contrairement aux approches simples par la théorie de valeurs extrêmes, cette théorie permet une analyse quantitative des pertes opérationnelles cumulées dans le temps, en tenant compte à la fois de la fréquence des pertes ainsi que de leur amplitude.

Nous avons montré comment, dans la limite asymptotique, on pouvait calculer les exigences en capital pour couvrir le risque opérationnel. Compte tenu des hypothèses réalisées, nous avons montré que cette allocation de capital était plus économe que l'approche de la théorie des valeurs extrêmes. Dans un deuxième temps, nous avons mené une analyse à horizon temporel fini. Nous avons montré par des simulations numériques que le régime asymptotique n'était atteint qu'en un temps très long et que la prise en compte de l'horizon fini était particulièrement cruciale pour les problèmes de réassurance et de produits dérivés sur le risque opérationnel comme les *Op Bonds*.

Nous pensons que cette méthode est adaptée à l'étude du risque opérationnel car elle mesure le risque opérationnel d'une institution et détermine le niveau de capital économique à allouer. L'avantage de cette méthode est de tenir compte de la fréquence des pertes opérationnelles qui est souvent faible alors que l'amplitude de ces pertes est souvent élevée. Par ailleurs, en ce qui concerne le calcul du capital économique, il nous semble qu'ici encore notre approche est tout à fait adaptée puisqu'elle se concentre sur le cumul des pertes opérationnelles et non sur chaque perte individuellement.

En adoptant une méthodologie issue de la théorie mathématique de l'assurance comme celle décrite ci-dessus, une institution peut piloter à souhait son exposition à tel ou tel type de risque opérationnel. Elle peut également vérifier l'évaluation des primes d'assurance qu'elle verse pour couvrir son risque opérationnel. Mais surtout, cette méthodologie met à sa portée un formidable outil de financement : les *Op Bonds*. Ce faisant elle ferait coup double : d'une part elle accéderait au financement sur les marchés financier via l'émission d'une dette obligataire, d'autre part elle couvrirait une partie de ses pertes opérationnelles en conditionnant le versement des coupons et le remboursement du nominal à ses pertes opérationnelles.

7- RÉFÉRENCES

1. Buhlmann, H. : *Mathematical risk theory*, Springer, Berlin (1970).
2. Cramér, H. : *The elements of probability theory and some of its applications*, Almqvist och Wiskell, Uppsala and Wiley, New-York (1954).
3. M. Cruz, R. Coleman, G. Salkin : Modelling and measuring operational risk, *Journal of risk*, pp. 63-72 (1999).

-
4. Embrechts, P., Klupellberg, C., Mikosch, T. : *Modeling extremal events*, Springer, Berlin (1997).
 5. Embrechts, P., Resnick, S., Samorodnitsky, G. : *Living on the edge*, Risk **11** (1), pp. 96-100 (1998).
 6. Laycock, M. : *Analysis of mishandling losses and processing errors*,
 7. Lundberg, F. : *Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen*, Akad. Afhandling. Almqvist och Wiksell, Uppsala (1903).
 8. Schmock, U. : *Estimating the value of the Wincat coupons of the Winterthur insurance convertible bond : a study of the model risk*. Astin Bulletin, **29**, N°1, pp. 101-163 (1999).