

Risque de défaut - Risque de crédit

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

Vivien BRUNEL - Benoît ROGER

This version: April 29, 2008

Introduction

Ces notes de cours représentent le support de cours " risque de crédit - risque de défaut " donné à l'Ecole des Ponts et Chaussées depuis 2005. Elles reprennent donc en grande partie les notions qui y sont développées en cours. Vos remarques seront utiles pour nous aider à améliorer la qualité de ces notes de cours.

Le but de ce cours est d'une part de décrire l'ensemble de la chaîne du risque de crédit dans la banque (marché du crédit cash et dérivé, gestion du risque, mesure de performance, allocation de capital et gestion d'un portefeuille bancaire), et d'autre part de donner aux étudiants, au travers d'un cours plus concret, une vision de leur futur métier d'ingénieur financier.

Activités d'une banque

On distingue essentiellement deux types de banques : les banques commerciales et les banques d'investissement. Les banques commerciales travaillent avec leurs clients, particuliers, professionnels, PME et grandes entreprises dont elles collectent les dépôts et à qui elles accordent des prêts. Les banques commerciales sont séparées en général en deux catégories, selon le type de clientèle : la banque de détail est en charge des particuliers et PME, la banque d'affaires est en charge des grandes entreprises. D'autre part, les banques d'investissement travaillent sur les marchés financiers qu'elles intermédient et sont en charge des émissions en primaire de titres sur les marchés pour le compte de leur clients, les fusions-acquisitions, le trading de produits dérivés...

Il existe une spécificité aux États-Unis depuis la crise de 1929. Adopté à l'apogée de la crise en 1933, le Glass-Steagall Act visait à interdire la répétition de ce qui, à l'époque, était perçu dans l'opinion comme l'une des causes de la bulle boursière : la spéculation sur les actions par les banques de détail. Cette loi a donc séparé les banques commerciales des banques d'investissement, mais est peu à peu tombée en désuétude pour disparaître en 1999 suite à la création de Citigroup.

Citigroup est un exemple de banque dite *universelle*, comme il en existe beaucoup en Europe. Les banques universelles rassemblent au sein d'un même groupe des activités de banque commerciale, de banque de réseau, mais aussi de gestion d'actifs, de services financiers aux investisseurs, de services financiers spécialisés (crédits à la consommation, assurance...).

Pour bien comprendre la nature des risques de la banque, et la façon dont elle va les gérer, il faut connaître ses interlocuteurs. Ceux-ci sont de trois types :

- Créanciers : l'activité de base de la banque est de prêter de l'argent à ses clients afin qu'ils puissent financer leur activité ou leurs projets. Les créanciers de la banque sont donc des particuliers, des entreprises, ou des états.
- Marchés financiers : l'accès privilégié de la banque aux marchés est d'autant plus important que cela permet à la banque de gérer une partie des risques engendrés par son activité de financement.
- Régulateur, autorité de tutelle : l'activité bancaire est très réglementée, d'une part en France par l'AMF (Autorité des Marchés Financiers), d'autre part par la commission bancaire qui impose aux banques de mettre des fonds propres en couverture du risque qu'elle prennent.

Il existe donc un paradoxe au niveau des banques : si une réglementation intervient sur le niveau de risque des banques, les déposants sont plus confiants et la banque y trouve son intérêt.

Objectifs du cours

Avant de parler de risque de défaut, ou de risque de crédit, il est important de comprendre quels sont les intervenants sur les marchés financiers. Les marchés financiers réunissent des acheteurs ou des vendeurs. Ceux-ci sont liés par un contrat (une vente, le plus généralement) qui stipule les conditions d'échange de flux financiers (emprunter aujourd'hui pour rembourser demain, emprunter à taux fixe, et prter à taux variable, etc) ou d'achat vente (actions, obligations d'état, obligations du secteur privé, monnaies, matières premières, etc).

Chaque contrat, y compris sous sa plus simple forme -l'achat ou vente d'une action- stipule les modalités d'échange. Prenons l'exemple d'une obligation. France Télécom veut lever 3 milliard d'Euros de capitaux pour financer une opération de rachat d'opérateur téléphonique. France Télécom va se tourner vers les interlocuteurs habituels pour obtenir les fonds manquants : banques, introduction en bourse de nouvelles actions, marché financiers.

Si la solution retenue est celle d'un emprunt sur les marchés financiers, France Télécom doit lever 3 Milliards d'Euros sous forme d'obligation et peut proposer l'opération suivante : pour 100 EUR prtés, France Télécom versera un intért annuel de 6%, et remboursera les 100 EUR dans leur totalité en 2010.

Plusieurs questions vont tre soulevées par les intervenants du marché :

1. dois je effectivement prter 100 à France Telecom, en échange des remboursements promis, ou moins ? Pourquoi pas 95 , ou 103 ? Quel prix dois je donner à l'obligation France Telecom ? (point de vue de l'investisseur, du market-marker)
2. suis-je déjà trop exposé dans mon portefeuille au secteur Telecom. Les nouvelles obligations que j'achète me permettent-elles de bien diversifier mon risque ? (point de vue du gérant)

3. acheter des obligations France Telecom implique des réserves -réglementaires et économiques- que je vais devoir supporter. Le rendement proposé par l'obligation me permet il de couvrir ces frais additionnels ? (définition du couple rendement-risque)

4. à quels facteurs de risque France Telecom est il sensible ? quel part de risque sur France Telecom est elle due au risque systémique, au secteur des Telecom dans son ensemble, ou à France Telecom elle-mme ? comment gérer ce risque ci ? (gestionnaire de portefeuille bancaire)

5. je désire revendre une partie du risque que je prends sur France Telecom au moyen de produits structurés regroupant plusieurs émetteurs de dette. Quelles sont les interactions entre les différents émetteurs que je vais considérer ? comment isoler plusieurs niveaux de risque que je vais revendre ? (point du vue du structureur de CDO)

Dans ce cours, nous aborderons chacune de ces questions. Les pré-requis concernent les outils mathématiques dont nous nous servons. Ceux-ci sont identiques pour la plupart à ceux requis par les cours de finance. Le cours est divisé en six séances, la septième séance étant réservée aux projets des étudiants.

- Séance 1 : Modélisation du défaut d'une entreprise
- Séance 2 : Le risque de défaut sur un seul émetteur
- Séance 3 : Produits structurés
- Séance 4 : Modèles de portefeuille
- Séance 5 : La mesure du risque
- Séance 6 : Gestion du portefeuille bancaire

Chaque séance fera l'objet d'un chapitre. Bien entendu, tous ce qui est abordé en cours est repris dans ces notes, mais nous irons plus loin que le cours sur certains sujets. Les paragraphes d'approfondissement seront repérés par un astérisque. Des exercices sont proposés en fin de chaque chapitre et les solutions fournies à la fin des ces notes. Le lecteur trouvera à la fin des notes une bibliographie permettant d'aller plus loin sur un sujet spécifique.

Chapter 1

Modélisation du défaut d'une entreprise

1.1 Prêteurs, emprunteurs, produits

Les marchés de la dette regroupent plusieurs types d'intervenants :

- les emprunteurs
- les prêteurs (investisseurs privés ou institutionnels)
- les agences de notation qui sont des organismes indépendants dont le métier est d'attribuer une note représentative du risque de crédit associé à n'importe quel type d'émission obligataire.

Les produits traités sur les marchés financiers sont divers. Les plus simples et les plus anciens sont les obligations, qui sont émises par des Etats (en France Obligation au Trésor (OAT), emprunts russes, Government Bonds américains, etc...), des administrations (Unédic en France qui a lancé en 2006 une opération de titrisation de ses créances pour un montant de 1.5 Mds), des villes (Municipality bonds aux Etats-Unis), des grandes entreprises (France Télécom, EDF, Sodexo) dont des banques (BNPP, Société Générale, Crédit Agricole, etc). Des produits dérivés sont ensuite apparus : les CDS (Credit Default Swap) ou plus généralement les dérivés de crédit classiques et enfin encore plus récemment des produits plus complexes tels que les CDO (Collateralized Debt Obligations) ou First-to-Default. Notons enfin l'existence de produits dits hybrides tels que les obligations convertibles qui permettent d'échanger de la dette contre des actions.

Le marché de la dette représente un volume important des échanges. Au premier trimestre 2005, 360 milliards d'Euros d'obligations avaient été émis (en Europe) pour un total de 805 milliards de dollars au niveau mondial. Par ailleurs, le montant de produits structurés s'élevait à 67 milliards d'euros et l'ensemble des prêts syndiqués à 250 milliards de dollars. Enfin, notons que le marché de la dette est en croissance soutenue depuis plusieurs années, et notamment la standardisation des produits structurés.

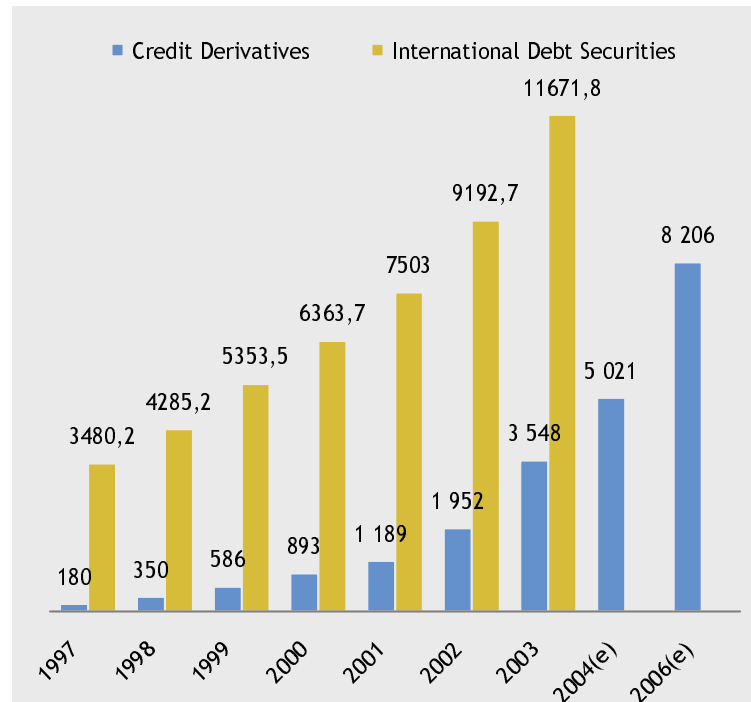


Figure 1.1: Croissance du marché de la dette (source : J.P. Morgan)

1.2 Les obligations risquées

Reprenons notre exemple France Télécom. Aujourd'hui, en 2006, France Télécom souhaite lever des fonds pour financer une acquisition importante ou une avancée technologique. En raison de contraintes fiscales, d'un cours boursier défavorable, France Télécom souhaite financer son opération via l'émission d'un emprunt sur les marchés financiers sous la forme de bons au porteurs. L'intérêt proposé est de 6% et la maturité de l'opération 4 ans.

France Télécom va se tourner vers une banque qui s'engage à placer sur les marchés financiers les titres émis, au prix de 100. Afin de parvenir à ce chiffre, la banque "testera" les marchés et demandera en conséquence à France Télécom d'ajuster à la hausse ou à la baisse le taux d'intérêt proposé (le coupon). La banque garantira ensuite à France Télécom la vente de tous les titres, s'engageant ainsi à prendre ceux qu'elle n'aura pas placés. On dira alors que la banque est collée (risque de colle) aux titres France Télécom.

Les titres sont émis au 1er septembre 2006. Un échéancier est mis en place suivant lequel :

- Au 01.09.2006, FT perçoit 100
- aux 01.09.2007, ..., 01.09.2009, France Télécom verse le coupon de 6 au porteur
- le 01.09.2010, France Télécom verse au porteur le dernier coupon de 6 et rembourse le principal de 100.

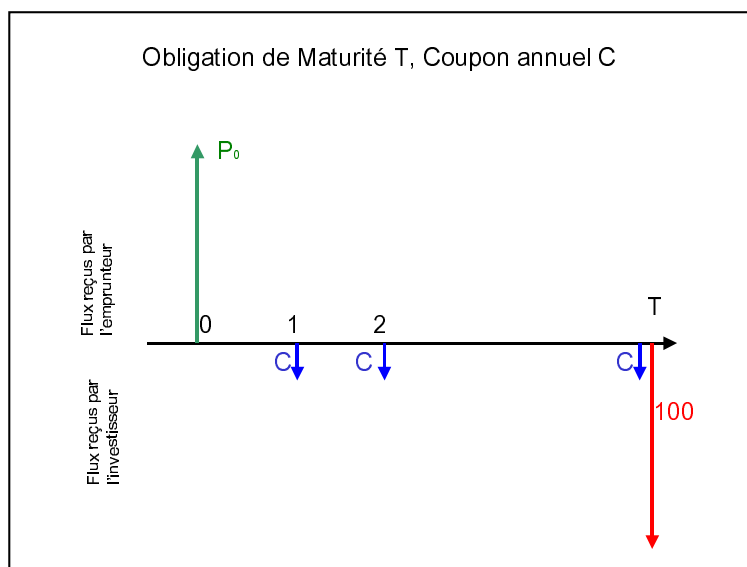
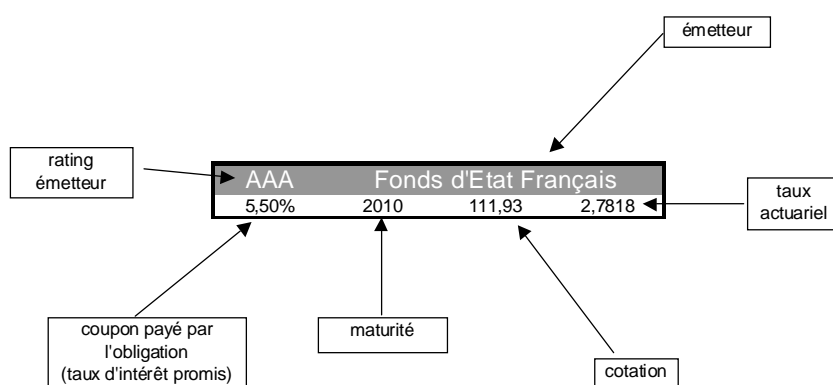


Figure 1.2: Echancier des paiements pendant la durée de vie de l'obligation.

Un porteur qui a acheté l'obligation France Télécom au 01.09.2006 peut la revendre sur le marché obligataire. Le prix d'échange est fixé par le marché et on assiste à une cotation de l'obligation France Télécom aux côtés d'autres obligations. Un exemple de cotation est le suivant :



Plusieurs informations sont rassemblées autour de la cotation :

- nom de l'émetteur
- qualité de crédit de l'émetteur (rating attribué par une agence de notation)
- maturité de l'obligation
- coupon

La cotation est un prix (en l'occurrence 111.93) auquel on associe un taux, le taux actuariel. Le taux actuariel est le taux qui égalise prix d'achat (la jambe fixe) et flux à venir (la jambe variable). Il reflète

la rémunération exigée pour le risque pris (risque de taux et risque de non-remboursement), qui dépend donc de la qualité de crédit de l'emprunteur (l'émetteur), du coupon et de la maturité de l'obligation. Le taux de rendement actuariel ρ est donc solution de l'équation :

$$\text{Prix} = 111.93 = \sum_{t=2007, \dots, 2010} \frac{5.5}{(1 + \rho)^{t-2006}} + \frac{100}{(1 + \rho)^{2010-2005}}$$

AAA	Fonds d'Etat Français		
5,50%	2010	111,93	2,7818
A-	France Télécom		
5,70%	2010	111,55	3,1396
AA	Caisse d'Epargne		
5,70%	2010	111,28	2,9665
AA-	Société Générale		
5,10%	2010	108,05	3,2827
AA	Crédit Agricole		
5,25%	2010	108,6	3,2826
BBB	Sodexho Alliance		
4,63%	2009	103	3,7094

Figure 1.3: Le prix de l'obligation - et le taux de rendement actuariel dépendent de la qualité de l'emprunteur. Comparaison de taux de rendement actuariels pour des maturités similaires.

La différence entre le taux de rendement actuariel et le taux sans risque mesure le risque de crédit sous-jacent à l'émetteur et supporté par le prêteur.

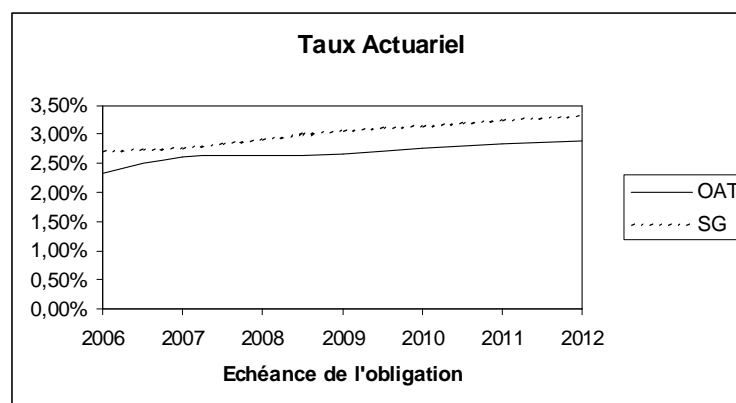


Figure 1.4: Comparaison des taux actuariels entre une obligation sans risque (emprunt d'état (OAT)) et une obligation risquée (Société Générale)

Un investisseur qui porte l'obligation quelques mois entre deux versements de coupons doit être rémunéré pour le risque porté bien qu'il ne puisse, en théorie, avoir droit à aucun versement de coupon puisqu'il

ne possède pas l'obligation lors des versements de coupon. Aussi, le prix d'une obligation est-il corrigé du coupon couru qui est simplement l'intérêt linéaire (au taux du coupon) sur la période entre le dernier versement coupon et aujourd'hui.

Le coupon couru est donc $\text{Coupon} \times (\text{Aujourd'hui} - \text{Dernière date de paiement du coupon})$. Le prix coté de l'obligation est généralement le prix pied de coupon (Clean Price), c'est à dire le prix réel de l'obligation auquel on retranche le coupon couru. En conséquence, le prix de l'obligation dans le temps ne subit pas de sauts dus aux versements de coupons.

Certaines obligations vont être cotées différemment. Il s'agit des obligations convertibles. Les obligations convertibles sont des obligations normales auxquelles est ajoutée une option de conversion en actions. Le nombre d'actions en lesquelles l'obligation peut-être convertie est spécifié à l'avance, ainsi que les dates d'exercice de l'option. Cette option permet pour l'émetteur de réduire le coût de la dette ainsi que les cash-flows à verser. Ce type de produit est attractif lorsque les marchés actions sont très volatiles. Il justifie enfin l'intérêt de modèles structurels permettant de décrire dans une même dynamique actions et obligations.

1.3 La modélisation du défaut d'une entreprise

Pour un investisseur dans la dette de l'entreprise, le défaut est en général un événement soudain. Il intervient lorsque l'entreprise ne peut plus faire face à ses engagements, ce qui a inspiré l'approche structurelle dans la modélisation du défaut d'une entreprise. L'approche structurelle est une modélisation de l'actif et du passif de l'entreprise. Le défaut est un événement qui survient lorsque la structure du bilan ne permet plus à l'entreprise de tenir ses engagements.

Regardons le bilan d'une entreprise :

Actifs	Equity
	Dette

L'entreprise, ou la firme, possède des actifs : ce sont des machines, des locaux, ou, dans le cas d'une banque, des prêts accordés. Ces actifs sont financés par les actionnaires et des créanciers qui ont acheté les actions et les obligations émises par l'entreprise. La Différence entre actions et obligations :

- flux de paiement : pour les obligations, les paiements sont fixés contractuellement, et pour les actions il n'y a pas de paiement fixes. Les actionnaires reçoivent le solde des avoirs, après paiements de créanciers. C'est cela la définition de l'action

- **Séniorité** : à liquidation de l'entreprise, on rembourse prioritairement les créanciers, on rembourse les actionnaires en dernier.

A la date $t = 0$, une entreprise est en besoin de financements pour lancer son activité. Prenons quelques chiffres. Les besoins en capitaux sont évalués à 100 000 EUR, qui vont être financés par des actionnaires et des créanciers. Imaginons que les entrepreneurs apportent 200 000 EUR, il reste 800 000 EUR à financer sous forme de créance. Les entrepreneurs pensent que leur entreprise produira ses premiers résultats dans un an. Ils empruntent donc aujourd'hui une somme S_0 et devront rembourser une somme S_T à la date $T = 1$ an. Dans un an, les actifs de l'entreprise auront évolué (achat de brevets, vente de produits, acquisition et amortissement de machines, etc.). Soit l'entreprise peut rembourser, auquel cas elle verse S_T aux créanciers (éventuellement après avoir vendu certaines activités, cf Vivendi Universal), et on retranche S_T de la valeur des actifs, les actionnaires (soit les entrepreneurs) pouvant vendre le reste de l'entreprise pour un montant d'actifs égal à $A_T - S_T$, soit l'entreprise ne peut rembourser la somme S_T à ses créanciers, les actifs sont vendus, et le produit de la vente est versé aux créanciers à concurrence de S_T . On peut donc résumer les flux financiers à la date T dans le tableau suivant :

Valeur des actifs	Flux reçus par les actionnaires	Flux reçus par les créanciers
$A_T \geq S_T$	$A_T - S_T$	S_T
$A_T < S_T$	0	A_T

1.3.1 Le modèle de Merton : le modèle de la firme (1974)

Le modèle de Merton est une adaptation au risque de crédit de modèle de Black-Scholes-Merton sur les produits dérivés, et le pricing d'un call. En effet, Merton valorise sous une probabilité risque-neutre equity et dette, comme étant respectivement un zéro-coupon moins un put et un call sur les actifs de la firme. Les hypothèses requises par le modèle de Black-Scholes-Merton sont reprises, à savoir :

- liquidité des marchés financiers,
- existence d'un actif sans risque,
- fractionnement des actions,
- possibilité d'acheter ou vendre à découvert.

L'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) est également requise. Dette et Equity étant échangés sur les marchés financiers, les actifs de la firme peuvent également être évalués sous une probabilité risque neutre sous laquelle leur rendements sont en moyenne égaux au taux sans risque. Plus précisément, Merton fait l'hypothèse que sous probabilité risque-neutre, les actifs de la firme suivent la loi d'un mouvement

brownien géométrique dont la diffusion est régie sous probabilité risque neutre par l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{dA_t}{A_t} = r dt + \sigma dW_t$$

En reprenant le tableau des flux de paiements à maturité de la dette introduit dans le paragraphe précédent, on peut donc écrire sous forme probabiliste les valeurs de la dette et des actions de la firme à toute date t antérieure à la maturité de la dette T . Ainsi, à la date $t = 0$, la valeur de marché de la dette est :

$$D_0 = E [e^{-rT} \min(S_T, A_T)]$$

et la valeur de marché des actions de la société est :

$$E_0 = E [e^{-rT} \max(A_T - S_T, 0)]$$

soit le prix d'un call sur les actifs de maturité T et strike S_T .

La valeur de marché de la dette est bien-sûr inférieure à la valeur faciale de la dette ajustée du taux sans risque $e^{-rT}S_T$, prix qui serait justement le sien si elle était sans risque. Une quantité (appelé spread) permet de mesurer le risque associé à la dette. Le spread est la rémunération souhaitée au dessus du taux sans risque pour accepter de prêter à l'entreprise. Le spread, que nous notons s , se calcule de la façon suivante :

$$D_0 = e^{-(r+s)T} S_T$$

soit :

$$s = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{S_T}{D_0} \right) - r$$

La valeur de marché de l'equity est simplement donnée par la formule de Black-Scholes.

$$E_0 = A_0 N(d_1) - S_T e^{-rT} N(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\ln(A_0/S_T) + (r + \sigma^2/2)T]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Rappelons que l'equity étant un call sur les actifs de la firme de strike S_T , les études de sensibilités sont connues grâce aux grecques des calls Black-Scholes. En particulier, et c'est le résultat le plus marquant, une volatilité élevée profite aux actionnaires dont le bien se trouve valorisé (le véga d'un call est positif). Dans le cas limite d'une volatilité infinie, les actionnaires perdent tout (avec probabilité 1/2) ou deviennent infiniment riches avec probabilité 1/2. Les conséquences sont opposées pour les créanciers mais avant d'en reparler, valorisons d'abord la dette. Puisque $D_0 = E [e^{-rT} \min(S_T, A_T)]$, on peut écrire :

$$D_0 = E [e^{-rT} S_T] - E [e^{-rT} (S_T - A_T)^+]$$

En notant que les pertes correspondent au payoff de la vente d'un put sur les actifs, de strike S_T et en notant également que Dette + Equity = Actifs, on obtient :

$$D_0 = A_0 N(-d_1) + S_T e^{-rT} N(d_2)$$

On peut également calculer la probabilité d'un événement de défaut. Celui-ci intervient lorsque la valeur des actifs à maturité est en dessous de la valeur faciale de la dette (quand les pertes sont positives). On appelle cette probabilité la Probabilité de Défaut (PD) et on peut également calculer la perte en cas de défaut (LGD, Loss Given Default) qui représente la perte moyenne d'un créancier en cas de défaut. On a :

$$PD = P[A_T \leq S_T] = N(d_2)$$

$$LGD = E[S_T - A_T | A_T \leq S_T]$$

Par rapport à ce calcul théorique, la LGD doit incorporer des coûts de détresse car la valeur des actifs n'est pas la même selon que ces actifs sont en vente ou non. La formule ci-dessus sous-estime donc de façon importante la LGD par rapport aux valeurs observées en pratique. Revenons rapidement sur l'influence de la volatilité sur la valeur de la dette. Deux raisonnements différents peuvent être menés. Le premier, très financier, consiste à dire Dette = Zéro-Coupon - Put Black-Scholes. Connaissant le signe du véga d'un put, on en déduit le signe de $\partial D_t / \partial \sigma$. Le second, consiste à observer que Dette = Actifs - Equity et $\partial A_t / \partial \sigma$. Les deux raisonnements confirment notre intuition : augmenter la volatilité des actifs augmente le risque de ne pas être remboursé à maturité de la dette. Cela diminue la valeur de la dette. De manière plus complète, des études de sensibilité classiques peuvent être menées en reprenant les résultats de sensibilités sur les options put et call en mathématiques financières. Intéressons nous plus particulièrement à la sensibilité à la maturité des obligations.

Dans le modèle de Merton, la dette est non risquée à très court terme puisque la probabilité que la valeur des actifs tombe en dessous de la valeur faciale de la dette est quasi-nulle. Ceci est en contradiction avec les spreads observés sur les marchés. Le spread pour des maturités courtes est en conséquence faible pour des maturités courtes et a tendance à augmenter lorsque l'on allonge la maturité de la dette (effet dégradation des actifs). Par contre, pour des probabilités de défaut très élevées, le spread décroît rapidement avec la maturité de la dette.

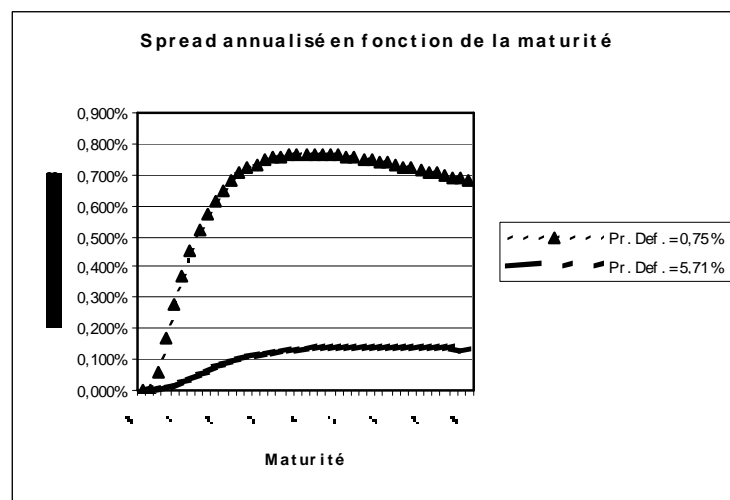


Figure 1.5: Spread et Maturité. Les spreads tendent à diminuer pour les longues maturités.

1.3.2 Critiques du modèle de Merton

Les points faibles du modèle de Merton sont les suivants :

- existence de la probabilité risque neutre : les actifs sont ils cessibles ?
- une seule maturité des zéros-coupons,
- dette statique non rebalancée,
- facilité d'implémentation,
- spread nul à maturité courte.

Pour aller plus loin sur ces questions, le lecteur peut consulter les articles de Ericsson et Reneby (sur l'existence d'une probabilité risque neutre pour la valorisation des actifs) ou le modèle de Geske (1977) pour obtenir une généralisation du modèle de Merton pour lequel la dette ne se rembourse pas en une échéance unique.

Il existe de nombreux modèles de pricing traitant un à un ces points. L'objectif n'est pas de dresser une liste exhaustive et nous nous contentons donc d'en citer quelques uns seulement.

1.3.3 Les dérivés du modèle de Merton

Le modèle de Merton a inspiré de nombreuses extensions en vue de pallier ses faiblesses : Black-Cox (1976), Longstaff-Schwartz (1985), Brys-de Varenne (1995).

L'épine dorsale du modèle de Black-Cox est identique à celle du modèle de Merton. Deux raffinements interviennent :

- les créanciers ont le droit de déclencher la faillite avant maturité de la dette, lorsque la valeur des actifs tombe en dessous d'un certain seuil,
- plusieurs catégories de dette sont émises : dette senior et dette junior qui ne commence à être remboursée que lorsque la dette senior a été intégralement remboursée.

Le modèle de Black-Cox est présenté sous une forme simplifiée dans les exercices dans la section suivante.

Le modèle de Longstaff et Schwartz combine modèle de Merton et taux d'intérêt stochastiques (modèle de Vasicek). Enfin, le modèle de Brys et de Varenne est l'agrégat de Black-Cox et Brys-de Varenne.

Citons enfin un modèle original et simple qui s'intéresse au temps de défaut, plutôt qu'au montant de la perte à une date donnée : le modèle de Leland (1994).

1.3.4 Le modèle de Leland

Comme dans le modèle de Merton, les actifs de la firme constituent la variable d'état du modèle. Ceux-ci suivent un processus de diffusion identique à celui présenté dans le cadre des modèles de Merton, ou Black-Cox, savoir :

$$\frac{dV_t}{V_t} = (r - \delta) dt + \sigma dW_t$$

Le modèle de Leland est un modèle stationnaire : le temps n'intervient pas. Cette simplification est obtenue via des hypothèses fortes (mais réalistes), sur la structure de la dette et le déclenchement de la faillite.

La faillite est déclenchée lorsque la valeur des actifs tombe en dessous d'une valeur seuil connu V_B . A la différence de Merton, la valeur seuil n'est pas nécessairement le montant en principal de la dette, dont nous précisons immédiatement la structure. La dette consiste en un principal P sur lequel la firme paie un coupon continu c jusqu'à faillite. Il s'agit d'une dette de maturité infinie. On aura donc la valeur de marché de la dette:

$$D = E \left[\int_0^\tau e^{-rt} c P dt + \min((1 - \alpha)V_\tau, P) \right]$$

Le paramètre α est la fraction des actifs perdue lors de la vente des actifs à la faillite, τ est l'instant auquel la faillite a lieu, et V_τ est la valeur des actifs à cet instant. On note que la valeur de marché de la dette est un put américain de maturité infini sur les actifs, dont le strike est la valeur seuil fixée. En termes mathématiques, le temps de faillite est le temps d'atteinte de la valeur V_B par le processus stochastique $(V_t)_{t \geq 0}$. Ce temps d'atteinte ne dépend que de la valeur initiale des actifs, et par conséquent, la valeur de marché de la dette à l'instant t est une seule fonction de la valeur des actifs V_t à l'instant t .

Avant de calculer la valeur de marché de la dette, puis en déduire la valeur de marché de l'equity, finissons de présenter les caractéristiques du modèle de Leland. Deux spécificités sont encore à présenter :

- les coûts de banqueroute : en raison de frictions, une fraction α des actifs est perdue lors de la banqueroute. Ils peuvent représenter la dépréciation à la vente des actifs, le paiement des salaires des employés, voire diverses aides favorables aux salariés. Ces coûts doivent être calculés. On les retranchera de la valeur des actifs, afin de calculer la valeur de marché des actifs de la firme.
- Les économies fiscales. Endettée, l'entreprise paie moins d'impôts. Les économies sont chiffrées à hauteur de τc par unité de temps. Ces économies devront être ajoutés à la valeur des actifs afin de parvenir à la valeur de marché des actifs, qui est égale à la somme des valeurs de marché de la dette et de l'equity.

Les différentes valorisations (valeur de marché de la firme, dette, actions) sont effectuées dans le modèle de Merton via l'écriture de l'équation différentielle satisfaite par chacune des trois variables à valoriser :

$$rF = \text{Cash-flows} + \frac{\partial F}{\partial t} + (r - \delta)V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\sigma^2}{2} V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}$$

à laquelle on rajoute les conditions limites. Par ailleurs, le temps n'intervenant pas dans la limite stationnaire, le terme $\partial F / \partial t$ est nul, et on recherche la solution générale de l'équation différentielle

sous forme de fonctions puissance. Ainsi, pour la valeur de marché $F(V)$ de la firme, on aura :

$$rF = \tau c + \delta F + (r - \delta)V \frac{\partial F}{\partial V} + \frac{\sigma^2}{2} V^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V^2}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} F(V_B) = (1 - \alpha)V_B \\ \text{La solution ne peut exploser en } +\infty \end{cases}$$

On écrit également les EDP ainsi que les conditions limites correspondant à l'impact des frais de banqueroute et des économies d'impôts sur la valeur de la firme. En cherchant une solution linéaire et en fonction puissance, on trouve la solution générale :

$$F(V, V_B) = V + \frac{\tau c}{r} - \left(\frac{\tau c}{r} + \alpha V_B \right) \left(\frac{V}{V_B} \right)^{2r/\sigma^2}$$

En appliquant le même résultat à la dette, on trouve :

$$D(V, V_B) = \frac{c}{r} \left[1 - \left(\frac{V}{V_B} \right)^{2r/\sigma^2} \right]$$

Par soustraction, on trouve la valeur de l'equity. Les calculs sont simplifiés et rapides (et lisibles !) lorsqu'on remarque que la valeur d'un euro payé à la banqueroute de la firme est égal à :

$$\left(\frac{V}{V_B} \right)^{2r/\sigma^2}$$

1.3.5 Le modèle de Merton à sauts

Afin de remédier aux spreads nuls pour des maturités courtes en contradiction avec les spreads de marché observé, on peut introduire des sauts sur le processus $(A_t)_{t \geq 0}$ qui dans le modèle de Merton représente la valeur de marché des actifs de la firme. Cette modélisation prend du sens lorsque l'on observe certains cours de bourse chuter (par exemple Nortel, en 2001, Alcatel qui a subi une baisse de 40% sur une journée) assimilables à la réalisation d'un saut plutôt qu'une réalisation extrême d'une diffusion continue du type brownien géométrique.

Sous des hypothèses identiques, le modèle de Merton à sauts permet d'obtenir des spreads non nuls pour des maturités courtes via l'introduction d'un processus de saut sur les actifs de la firme dont l'équation de diffusion devient :

$$\frac{dA_t}{A_t} = r dt + \sigma dW_t + \Delta A_t dN_t$$

où le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson.

1.3.6 Exercices

Le Modèle de Merton avec taux d'intérêts stochastiques Dans cette version du modèle de Merton, le taux court n'est plus constant mais suit une diffusion suivant le modèle de taux court de Vasicek. On

a les deux équations de diffusion suivantes :

$$\frac{dV_t}{V_t} = r_t dt + \sigma_V dW_t^V$$

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^r$$

avec W^r et W^V deux mouvements browniens standards tels que $\langle dW_t^V, dW_t^r \rangle = \rho dt$.

1. Redonnez le prix d'un zéro-coupon non risqué.
2. En changeant de numéraire, calculer la valeur de l'Equity.
3. En déduire la valeur de la dette.

Modèle de Leland (1994) Dans cet exercice, le modèle sous-jacent est celui de Leland, dans sa forme la plus simple (1994). Le but de l'exercice est d'une part se familiariser avec les modèles structurels, d'autre part maîtriser les techniques de "contingent claim analysis" et enfin de faire le lien entre modèle à intensité et modèles structurels ou à barrière. On considère une firme dont les actifs suivent sous probabilité historique la diffusion :

$$\frac{dV_t}{V_t} = (r - \delta) dt + \sigma dW_t$$

où W est un mouvement brownien standard.

La firme est financée par dette et actions qui sont échangées sur les marchés financiers. La dette a une structure simple : elle consiste en un principal P qui a été emprunté à $t = 0$, sur lequel la firme paie ad vitam aeternam un coupon continu C , le principal n'étant jamais remboursé. La firme est dirigée par ses actionnaires qui y injectent de l'argent. Ceux-ci peuvent à tout moment décider de suspendre ces paiements et déclencher la faillite de la firme. On notera r le taux sans risque.

1. Dans le cas où la firme ne fait jamais défaut, quelle est la valeur de marché de la dette ?
2. On considère un actif financier F sur lequel est payé un coupon continu $\gamma + \beta V$ par unité de temps, et qui paie $\gamma_B + \beta_B V_B$ à faillite, c'est à dire quand V atteint V_B . Ecrivez l'EDP satisfaite par ainsi que les conditions limites. Discutez l'EDP dans le cadre particulier du modèle de Leland.

Le paiement de la dette donne droit à une ristourne fiscale à hauteur de τC par unité de temps, où τ est le taux d'abattement. Par ailleurs, une fraction α des actifs est perdue en coûts de banqueroute lors de la faillite.

3. Calculez les valeurs de marché de l'abattement fiscal, et des coûts de banqueroute.
4. Valorisez un Zéro-Coupon dont le paiement de 1 EUR se fait à faillite de la firme.

En additionnant aux actifs la valeur de marché des déductions fiscales et en y retranchant la valeur de marché des coût de banqueroute, on obtient la valeur de marché totale des actifs de la firme.

5. Donnez l'expression de la valeur de marché totale des actifs de la firme.
6. La dette a été vendue au pair, soit $P = C/r$. Calculez la valeur de marché de la dette.
7. Calculez la valeur de marché des actions (deux méthodes).
8. Calculez la distribution du temps de faillite. Fates le lien entre le modèle de Leland et les modèles à intensité.

Initiation à la corporate finance

9. Les actionnaires peuvent fixer leur niveau d'endettement (choix de C). Calculer le taux d'endettement

qui optimise

- a. La valeur totale de la firme
- b. La valeur des actions de la firme
- c. La valeur de la dette.

10. Si la volatilité des actifs augmente, dans quelles proportions valeur totale, actions et dettes seront elles affectées ?

Indicateurs de risque

11. Calculez la perte moyenne à un an. Sous quelle probabilité la calculez vous ?

(Un extrait du) Modèle de Black et Cox (1976)

On se place ici dans le cadre du modèle de Merton (dont on conserve les notations). On cherche donc à évaluer le prix d'un zéro-coupon risqué émis par une firme dont les actifs satisfont à l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{dV_t}{V_t} = r dt + \sigma dW_t$$

La valeur des actifs à $t = 0$ est V_0 , la valeur faciale de la dette D et la maturité du zéro-coupon T . Les créanciers sont protégés par la clause suivante dans le contrat : si la valeur des actifs tombe en dessous de $D e^{-\gamma(T-t)}$, la firme est liquidée, le solde de la liquidation revenant aux créanciers.

1. Identifiez les sources de pay-off pour les créanciers.
2. En notant τ le temps d'atteinte de la barrière $D e^{-\gamma(T-t)}$ pour le processus $(V_t)_{t \geq 0}$, exprimez la fonction de distribution de τ .
3. Calculez le prix du bond à la date d'aujourd'hui.

Le Modèle de Merton avec taux d'intérêts stochastiques.

Dans cette version du modèle de Merton, le taux court n'est plus constant mais suit une diffusion suivant le modèle de taux court de Vasicek. On a les deux équations de diffusion suivantes :

$$\frac{dV_t}{V_t} = r_t dt + \sigma_V dW_t^V$$

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma_r dW_t^r$$

avec W^r et W^V deux mouvements browniens standards tels que $\langle dW_t^V, dW_t^r \rangle = \rho dt$

1. Redonnez le prix d'un zéro-coupon non risqué.
2. En changeant de numéraire, calculer la valeur de l'Equity.
3. En déduire la valeur de la dette.

Chapter 2

Le risque de défaut sur un seul émetteur

2.1 Le rating

2.1.1 Présentation

L'exploitation des données comptables, financières, nationales ou industrielles permet d'attribuer une note aux entreprises ayant émis une dette publique ou privée. Cette note reflète la qualité de crédit de l'emprunteur, et régit de fait les conditions auxquelles celui-ci peut émettre de nouveaux emprunts.

Les trois organismes de notation les plus connus sont Standard and Poors, KMV Moody's et Fitch qui ont défini chacun une méthodologie et une échelle de notation propres, mais équivalentes entre elles. Ces agences de rating, outre qu'elles assignent une note (un rating) portant sur la qualité de crédit globale des entreprises, construisent également des matrices de transitions reflétant l'évolution moyenne passée des entreprises dans l'échelle des ratings.

Les échelles de rating (en grades pleins) sont les suivantes :

La catégorie dite *investment grade* regroupe les entreprises à forte capacité de remboursement et dont la sensibilité aux aléas économiques est réduite. Au contraire, les entreprises, situées dans la catégorie *Speculative Grade* offrent des garanties bien moindres et sont beaucoup plus sensibles aux chocs économiques. Le risque de crédit lié à cette catégorie étant plus élevé, celui-ci est nettement plus rémunéré.

L'échelle de rating est décroissante : elle va de AAA (excellente capacité à rembourser) à D (défaut, faillite, suspension du paiement de la dette).

Il est possible d'affiner cette classification, en introduisant les sous-grades. On subdivisera par exemple la catégorie AA ou Aa ainsi :

	S&P	Moody's	Fitch
Investment Grade	AAA	Aaa	AAA
	AA	Aa	AA
	A	A	A
	BBB	Baa	BBB
Speculative Grade	BB	Ba	BB
	B	B	B
	CCC	Caa	CCC
Default	D	D	D

Figure 2.1: Echelles de ratings pour les trois agences de notation principales.

Standard's and Pooors	AA+	Moody's	Aa1
	AA		Aa2
	AA-		Aa3

Figure 2.2: Deux échelles de notations équivalentes chez S&P et Moody's

2.1.2 Matrices de transition

Les ratings reflètent à une date donnée la qualité de crédit d'un emprunteur. Celle ci peut varier dans le temps, aussi les agences de rating calculent-elles également des matrices de transition dont la lecture renseigne sur l'évolution sur une ou plusieurs années de la qualité de crédit d'un emprunteur, c'est à dire sa probabilité de migration vers un autre rating, ainsi que la probabilité de défaut. En lisant la matrice de transition suivante, on remarquera par exemple que les firmes notées AAA restent dans leur grande majorité (plus de 93% d'entre elles) notées AAA après un an. Leur taux de défaut est nul, comme indiqué par la dernière colonne. Notons que bien que le taux de défaut d'une contrepartie AAA à un an est nul, il est non nul sur un horizon de deux ans. En effet, en supposant que la matrice de transition ne varie pas, on aura :

$$Pd(AAA) = Pd(AAA, D) \times 1 + Pd(AAA, AA) \times Pd(AA, D) + Pd(AAA, CCC) \times Pd(CCC, D)$$

Cette dernière remarque nous permet d'introduire le principe de matrice génératrice. On recherche une matrice de transition qui sera stable dans le temps, c'est à dire telle que :

$$\text{Matrice à } N \text{ années} = (\text{Matrice à 1 an})^N$$

original rating	probability of migrating to rating by year end (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Default
AAA	93.66	5.83	0.40	0.08	0.03	0.00	0.00	0.00
AA	0.66	91.72	6.94	0.49	0.06	0.09	0.02	0.01
A	0.07	2.25	91.76	5.19	0.49	0.20	0.01	0.04
BBB	0.03	0.25	4.83	89.26	4.44	0.81	0.16	0.22
BB	0.03	0.07	0.44	6.67	83.31	7.47	1.05	0.98
B	0.00	0.10	0.33	0.46	5.77	84.19	3.87	5.30
CCC	0.16	0.00	0.31	0.93	2.00	10.74	63.96	21.94
Default	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00

Figure 2.3: Exemple de matrice de transitions de rating en grades pleins

Plus généralement, les probabilités de transitions de ratings à un horizon T sont données par la matrice :

$$M_T = \exp(T \times \text{Matrice Génératrice})$$

La logique économique sous-jacente est que les matrices de transitions observées ne sont que les réalisations d'une processus de Markov stable (de la même façon que la croissance économique varie autour de sa moyenne au rythme des périodes de récession et de forte croissance). Suivant cette propriété, on doit avoir :

$$\text{Matrice Génératrice à 1 an} = \ln(\text{Matrice Génératrice à } N \text{ années})$$

On construira le logarithme de la matrice par série entière :

$$\ln(1 + X) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{X^n}{n}$$

En pratique, toutes les études empiriques prouvent que les matrices de transition ne sont pas markoviennes.

2.1.3 La dégradation des ratings

On observe pour les bons ratings une dégradation moyenne au cours du temps. Celle-ci se traduit par une probabilité de défaut (croissante) convexe. Celle-ci indique une probabilité de défaut marginale croissante au cours du temps. De façon symétrique, la probabilité de défaut cumulée au cours du temps pour un mauvais rating est une courbe (croissante) concave. On note un relatif équilibre (au moins pour des maturités moyennes) pour les ratings intermédiaires.

Nous reparlerons des ratings dans les modèles de portefeuilles proposés par l'industrie dont certains se basent sur l'exploitation des ratings (cf. CreditMetrics).

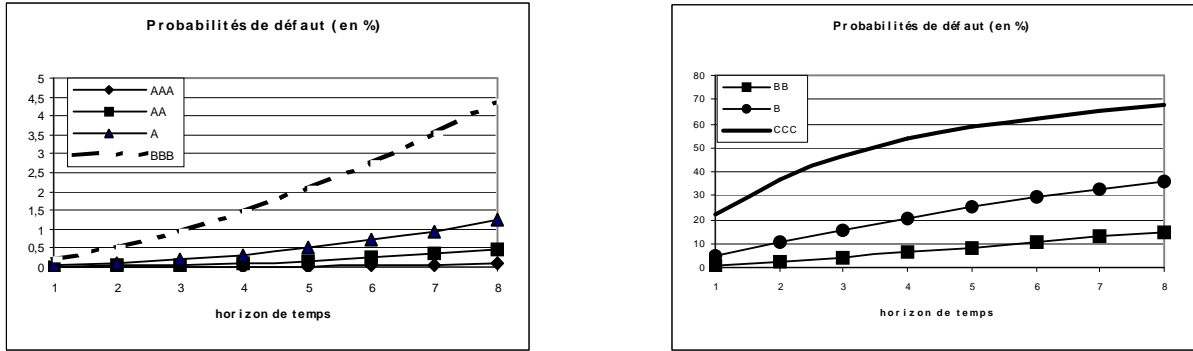


Figure 2.4: Probabilités de défaut cumulées pour des ratings Investment Grade Probabilités de défaut cumulées pour des ratings Speculative Grade

2.2 Les dérivés de crédit

2.2.1 Les CDS (Credit Default Swap)

Le marché des dérivés de crédit a explosé depuis une dizaine d'années, comme en témoigne le graphe suivant extrait du quotidien " La Tribune " (sept. 2006) :

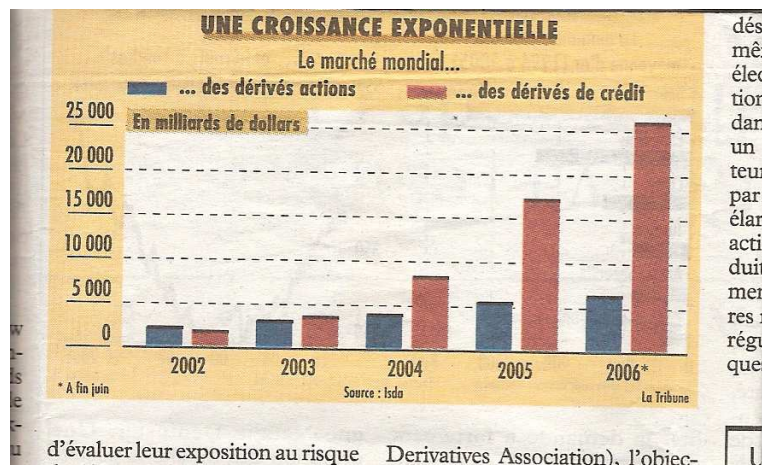


Figure 2.5: Evolution du marché des dérivés de crédit

La moitié des dérivés de crédit échangés sont des Credit Default Swaps (CDS), et c'est la standardisation des contrats par l'ISDA (International Swap and Derivatives Association) depuis 1999 qui a scellé le succès des dérivés de crédit. Un CDS est un contrat de swap entre un acheteur de protection et un vendeur de protection sur un nom de référence, qui n'a en général aucun rapport entre les deux contreparties du swap.

- Acheteur de protection : paie un spread trimestriel constant sur un nominal donné et sur une maturité donnée.
- Vendeur de protection : reçoit les flux de spread trimestriels, et subit une perte en cas de credit

event. Cette perte peut se matérialiser de deux façons :

- Physical settlement : il doit acheter au pair une obligation en défaut à l'acheteur de protection. L'acheteur de protection doit fournir l'obligation la moins chère à livrer écrite sur le nom de référence pour un montant nominal égal au nominal du swap.
- Cash settlement : le vendeur de protection doit payer à l'acheteur de protection la différence entre le pair et le prix de marché de l'obligation en défaut écrite sur le nom de référence.

Les cas de "credit event" sont au nombre de 3 dans les contrats standard :

- Banqueroute : dépôt de bilan de l'entité de référence
- Failure to pay : l'entité de référence ne remplit pas un engagement contractuel (paiement d'un coupon par exemple).
- Restructuration de la dette

Le schéma de fonctionnement du CDS est le suivant :

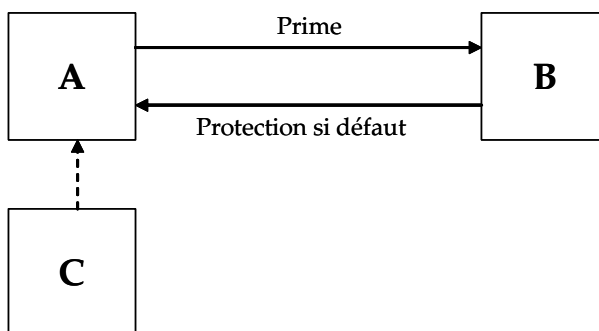


Figure 2.6: Mécanisme de fonctionnement des CDS

Afin de mieux comprendre l'intérêt (et le succès) des CDS, nous comparons les flux d'une obligation risquée et ceux d'un CDS sur le même nom de référence. Construisons la première stratégie, qui consiste à emprunter 100 à la date initiale pour acheter une obligation risquée au pair (donc son prix est également 100). Supposons que cette obligation verse des coupons trimestriels indexés au taux variables Euribor 3 mois plus un certain spread s . Chaque coupon en fin de trimestre sera égal à $100 * (\text{Eur } 3M + s)$. D'un autre côté, on suppose que le coût de l'emprunt se traduit par un paiement trimestriel d'intérêts également indexés sur l'euribor 3M, et que les dates de paiement sont identiques à celles des coupons de l'obligation. Dans ce cas, notre investisseur n'a aucun risque de taux résiduel parce que le flux (entrant) de coupons et le flux (sortant) de paiement d'intérêts se compensent, de sorte que le solde net est un flux entrant correspondant au spread de l'obligation. Si aucun défaut n'intervient avant la maturité de l'obligation, l'obligation verse son dernier coupon à la maturité et rembourse le principal, c'est-à-dire 100. L'investisseur rembourse alors son emprunt. En revanche, si un défaut intervient avant la maturité de l'obligation, celle-ci a un prix de marché qui chute (égal à R). L'investisseur peut alors faire le choix de

la revendre à ce prix et de rembourser son emprunt, réalisant à ce stade une perte nette de $100 - R$. Le graphique ci-dessous schématise l'ensemble des flux reçus par l'investisseur (flèches vers le haut) et payés (flèches vers le bas).

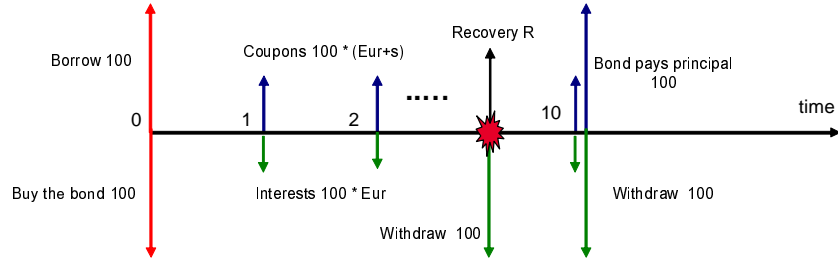


Figure 2.7: Cash-Flows associés à l'achat d'une obligation risquée financée par un emprunt

Supposons à présent que notre investisseur choisisse de vendre de la protection sur le même nom de référence au travers d'un contrat de CDS avec une contrepartie indépendante de l'entité de référence. Supposons que le contrat porte sur une seule obligation (celle décrite ci-dessus), que le règlement s'effectue en "physical settlement", que le spread du CDS est s , le nominal 100 et la maturité est égale à celle de l'obligation de référence. Tant que le nom de référence est en vie, le vendeur de protection touche trimestriellement la prime du swap égale à $100 \times s$. Si aucun défaut ne survient avant la maturité du CDS, le vendeur de protection aura touché toutes les primes trimestrielles et n'aura eu à subir aucune perte. En revanche, si un défaut intervient avant la maturité, le vendeur de protection est obligé d'acheter au pair une obligation qui vaut seulement R . Sa perte nette est égale à $100 - R$, comme ci-dessus.

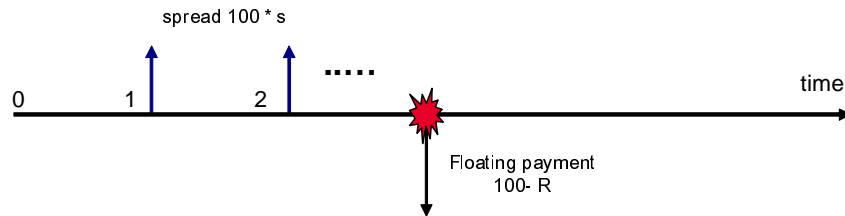


Figure 2.8: Cash-flows associés à un CDS

En résumé, nous voyons que si le CDS a le même spread que l'obligation de référence, les flux nets engendrés à chaque date par l'une ou l'autre des deux stratégies ci-dessus sont égaux. Il est donc presque équivalent (en termes de flux) de vendre de la protection ou d'emprunter pour acheter l'obligation de référence. Il existe toutefois une différence en termes de flux parce que si dans la première stratégie, l'investisseur détient l'obligation et, par conséquent, est assuré d'en toucher les flux tant que l'émetteur est en vie, ce n'est pas tout à fait le cas pour un vendeur de protection. En effet, on peut très bien imaginer que sa contrepartie dans le swap disparaisse alors que le nom de référence est encore en vie. Dans ce cas, le l'acheteur de protection ne recevra plus de protection de la part du vendeur de protection si celui-ci fait défaut et devra trouver une contrepartie de remplacement. Si le prix d'un swap est toujours initialement nul, ce n'est en général plus le cas à une date ultérieure, et le swap de remplacement qui versera les mêmes primes trimestrielles pourra éventuellement avoir un coût de remplacement non nul

pour le l'acheteur de protection en cas de hausse des spreads de marché.

Par ailleurs, l'équivalence entre les flux d'une obligation et d'une position vendeuse de protection n'est que partielle dans la mesure où il s'agit de deux types de contrats faisant appel à des investisseurs différents et définis par des clauses similaires mais pas en tous points identiques. En particulier, nous observons de manière assez systématique que les spreads de CDS sont supérieurs aux spreads obligataires. Différents effets expliquent ce phénomène :

- Les cas de "Credit Event", englobent le défaut, mais ont une définition plus large. En particulier, la restructuration de la dette, si elle n'est pas considérée comme un défaut par les créanciers, est un motif de déclenchement des CDS.
- Les créanciers bénéficient contractuellement de certains recours et covenants en cas de faillite de l'émetteur. Les contreparties de CDS n'ont absolument aucune influence sur la liquidation éventuelle de l'entité de référence.
- Le marché des dérivés de crédit permet l'éclosion de certains types d'intervenants, les acheteurs de protection.

En revanche, il y a un effet important qui fait diminuer la base entre les spreads de CDS et les spreads obligataires : les fonds et hedge funds voient dans les dérivés de crédit un moyen peu onéreux de s'exposer dans de bonnes conditions de spread à un risque de crédit. Ce type d'investisseur est massivement vendeur de protection.

Les CDS permettent d'obtenir une exposition synthétique (sans financement) sur une contrepartie. Ils interviennent fréquemment dans le montage de CDO dont nous reparlons plus loin.

2.3 Les modèles à intensité

Les modèles à intensité ont pour objectif de décrire la soudaineté du défaut tout en recherchant une calibration sur les données de marché. Le défaut est décrit comme un processus de Poisson (souvent non-homogène) dont on cherchera à connaître la distribution du temps d'arrivée et dont l'intensité peut être elle-même aléatoire.

Présentons d'abord le cas le plus simple, celui d'un processus de Poisson homogène. Soit T_1, \dots, T_n une série de variables aléatoires indépendants et identiquement distribués suivant une loi exponentielle de paramètre λ . On définit pour chaque instant t le processus de sauts :

$$N_t = \sup\{n \geq 0; T_1 + \dots + T_n \leq t\}$$

La quantité N_t représente le nombre de sauts avant l'instant t , et sa loi est :

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

On définit le défaut comme l'instant du premier saut, qui intervient à la date τ :

$$\{\tau > t\} = \{N_t = 0\} = \{\lambda t < T_1\}$$

Lorsque le défaut est décrit par un processus de Poisson d'intensité constante λ , on aura donc :

$$P[\tau \geq t] = e^{-\lambda t} = e^{-\int_0^t \lambda ds}$$

$$E[\tau] = 1/\lambda$$

Notons qu'il s'agit d'un processus à absence de mémoire dans le sens où

$$P[\tau > t + s | \tau > t] = P[\tau > s]$$

Lorsque le processus de Poisson est non-homogène, cette propriété se perd et la probabilité de survie est légèrement modifiée. Celle ci devient :

$$P[\tau \geq t] = e^{-\int_0^t \lambda_s ds} \text{ et } P[\tau > t + \delta t | \tau > t] \sim \lambda_t \delta t \text{ lorsque } \delta t \rightarrow 0$$

Nous avons bien sûr supposé ici que l'intensité de défaut était un processus prévisible et l'on pourrait vouloir s'affranchir de cette hypothèse en arguant que le défaut est un événement aléatoire lui-même soumis à des conditions extérieures (situation économique, taux d'intérêt, etc) soumises à des effets aléatoires. Afin de capturer cette dimension, on voudra introduire une intensité de défaut elle-même aléatoire. La probabilité de survie devient alors :

$$P[\tau \geq t] = E \left[\underbrace{E \left[\underbrace{P[\tau > t | \{\lambda_s | 0 \leq s \leq t\}}_{\text{Connaissant la trajectoire de } \lambda_s, \text{ on infère une probabilité de survie conditionnelle}} \right]}_{\text{On intègre sur toutes les trajectoires possibles}} \right] = E \left[e^{-\int_0^t \lambda_s ds} \right]$$

Exemple : Imaginons que l'intensité de défaut prend deux valeurs λ_{sup} et λ_{inf} suivant l'état de l'économie : récession ou prospérité. Un moyen simple pour construire un temps de défaut aléatoire dont l'intensité est elle-même aléatoire est d'adapter la formulation précédente ($\{\tau > t\} = \{\lambda t > T_1\}$) comme suit :

$$\tau = \inf \left\{ t \geq 0 ; \int_0^t \lambda_s ds \geq T_1 \right\}$$

On obtient ainsi un modèle standard de marché qui est le modèle de Cox importé des travaux de modélisation sur les taux.

Le processus λ_t est un processus de retour à la moyenne positif qui, sous certaines conditions, reste presque sûrement entre deux bornes. L'analogie avec les taux d'intérêt est directe. Pour le prix d'un zéro-coupon, on calcule :

$$B(t, T) = E \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| F_0 \right]$$

où r_t désigne le taux instantané sans risque. On déduira alors facilement des calculs effectués dans le cadre des modèles de taux la probabilité de survie à la date t :

$$p(t, T) = E \left[e^{-\int_t^T \lambda_s ds} \middle| F_0 \right]$$

L'équation de diffusion du processus λ_t est :

$$d\lambda_t = \kappa(\theta - \lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dB_t$$

où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard. Par ailleurs, on a la propriété que le processus $1_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^t \lambda_s 1_{\{\tau \geq s\}} ds$ est une martingale locale.

Nous pouvons décrire l'essentiel de la théorie des CDS dans un modèle à intensité constante, le modèle de crédit le plus simple. Comme nous l'avons vu dans le chapitre consacré aux modèles à intensité, la loi du temps de défaut dans ce modèle est une loi exponentielle, à un paramètre. Nous appelons λ l'intensité de défaut et τ la date aléatoire de défaut. La loi du temps de défaut est donnée par :

$$P[\tau < t] = 1 - e^{-\lambda t}$$

Nous calculons la valeur du spread s qui annule la valeur initiale du swap, c'est-à-dire qui égalise la valeur des jambes fixe et variables du swap. La jambe fixe est la jambe payeuse de spread à des dates régulières t_i jusqu'à maturité T du CDS, sauf en cas de défaut de l'entité de référence. La jambe fixe a donc un prix égal à :

$$\begin{aligned} JF &= E \left[e^{-rt_i} \sum_i s(t_i - t_{i-1}) 1_{\{\tau > t_i\}} \right] + CC \\ &= \sum_i s(t_i - t_{i-1}) e^{-(r+\lambda)t_i} \end{aligned}$$

Dans l'hypothèse où le paiement du spread s'effectue en continu, la somme de Riemann ci-dessus converge une intégrale, et nous obtenons :

$$JF = \int_0^T s dt e^{-(r+\lambda)t} = s \frac{1 - e^{-(r+\lambda)T}}{r + \lambda}$$

Cette jambe fixe a une NPV (Net Present Value) égale au spread multiplié par une quantité qui s'apparente à une duration risquée, appelée DV (Dollar Value).

$$JF = s DV(0, T)$$

La DV est égale à la duration de l'obligation qui rémunère euribor continument si l'intensité de défaut est nulle. Ici, cela généralise la notion de duration au cas où il y a du risque de crédit. La duration risquée prend donc en compte l'absence de paiement de spread pour les cas où le défaut survient avant la maturité. La jambe variable verse des flux en cas de défaut de l'entité de référence du CDS. Ces flux sont alors égaux à la perte en cas de défaut (Loss Given Default, $LGD = 1 - R$) multipliée par le nominal du CDS (supposé égal à 1). On a alors :

$$JV = E \left[(1 - R) 1_{\{\tau \leq T\}} \right] = (1 - R) (1 - e^{-\lambda T})$$

Le prix initial du CDS est égal à la différence de prix entre les deux jambes du swap. Le spread qui annule le prix de ce swap est appelé le "fair spread". Un développement au premier ordre donne :

$$s = \lambda(1 - R)$$

Les formules ci-dessus sont valables pour un CDS de nominal 1. Si on note à présent N le nominal du swap, la valeur de marché du swap à $t = 0$ est égale à 0 puisque le fair spread est calculer pour évaluer

les deux jambes du swap. En revanche, à une date ultérieure, le swap rémunère le vendeur de protection sur la base du spread initial alors que le spread de marché fluctue et a une valeur en général différente de celle du fair spread. Par conséquent, si le vendeur de protection veut dénouer sa position alors que le spread de marché est plus faible, celui-ci recevra une prime pour dénouer la transaction. La valeur de marché du CDS est, pour la position vendeuse de position :

$$MtM(t) = s(t, T) DV(t, T) - JV(t, T) \sim [s(t, T) - s(0, T)] \cdot DV(0, T)$$

La variation du mark to market de la position vendeuse de protection est proportionnelle à la variation de spread, et la sensibilité du mark to market est égal à la DV de la position. De façon analogue à ce qui se passe sur les obligations, où la sensibilité à une variation de taux est la durée, dans le cas des CDS, cette "durée risquée" est la DV.

La formule reliant le spread à l'intensité de défaut montre que si la structure par terme de spread est plate, l'intensité de défaut a également une structure par terme plate. On peut étendre l'approche structurelle au cas où la courbe des spread n'est pas plate, ce qui conduit naturellement à une structure par terme des intensités. Appelons $S(t)$ la fonction de survie :

$$s(t) = P(\tau > t)$$

La probabilité conditionnelle de défaut entre les dates t et $t + dt$ permet de définir l'intensité de défaut entre ces deux dates comme le taux forward instantané de défaut conditionnel à la survie à la date t :

$$\lambda_t dt = P[\tau < t + dt | \tau > t] = -\frac{S'(t)}{S(t)} dt$$

La résolution de l'équation différentielle $S'(t) = -\lambda_t S(t)$ conduit à la fonction de survie :

$$S(t) = \exp \left[-\int_0^t \lambda_s ds \right]$$

Si on considère la jambe fixe d'un swap de défaut payant un spread s en continu, sa valeur de marché est donnée par :

$$JF(0, T) = E \left[s(0, T) \int_0^{\tau^T} dt e^{-rt} \right] = s(0, T) \int_0^T dt \exp \left[-\int_0^t (r + \lambda_s) ds \right]$$

Par ailleurs, le prix de la jambe variable est :

$$JV(0, T) = (1 - R) E [e^{-r\tau} 1_{\{\tau < T\}}] = (1 - R) \int_0^T dt \lambda_t \exp \left[-\int_0^t (r + \lambda_s) ds \right]$$

Le calibrage s'effectue généralement sur des intensités constantes par morceaux.

Chapter 3

Structurés de crédit et CDO

3.1 First to Default

Un First to Default est un contrat de swap au même titre qu'un CDS. La seule différence est que le Credit Event est déclenché par le premier défaut survenant sur un portefeuille de crédit déterminé à l'avance. L'acheteur de protection paie une prime trimestrielle au vendeur de protection jusqu'à maturité du contrat sauf si un défaut intervient entre temps sur le portefeuille de référence. A cette date, le vendeur de protection paie un montant égal à $1 - R$, où R est le taux de recouvrement.

L'acheteur de protection n'est couvert que contre le premier défaut ; il est donc moins couvert que s'il achetait la protection sur tous les noms du panier de référence. Par conséquent, le spread du FtD est inférieur la somme des spreads des noms du panier de référence. Par ailleurs, vendre la protection via un FtD est plus risqué que vendre la protection sur n'importe lequel des noms du panier de référence, et en particulier sur le plus risqué d'entre-eux. Le spread du FtD est donc supérieur au spread du nom le plus risqué. On a donc la relation d'arbitrage suivante :

$$\max(s_1, \dots, s_n) \leq s_{FtD} \leq \sum_i s_i$$

La date du premier défaut sur un panier dépend des probabilités de défaut individuelles ainsi que d'un paramètre de corrélation. Une formule qui permet de capter l'ordre de grandeur du spread d'un FtD est :

$$s_{FtD} \sim \frac{2}{3} \sum_i s_i$$

3.2 Mécanisme de fonctionnement

CDO est l'acronyme pour Collateralized Debt Obligation. Il n'y a pas de convention unanimement acceptée pour désigner ce type de structurés de crédit. On parle généralement des Asset Backed Securities (ABS) dont les CDO sont une catégorie particulière. Les ABS sont des titres émis lors d'une opération de titrisation. La titrisation consiste à créer et à émettre des titres adossés par un portefeuille de prêts, d'obligations, de créances ou de cash-flows futurs. Ces titres sont des obligations ou des notes émises par

un SPV (Special purposed Vehicle) qui achète les actifs qui servent de collatéral d'adossement aux notes. Dans tous les cas, il y a plusieurs investisseurs qui n'ont recours que sur le collatéral.

Dans une opération de titrisation, le SPV achète les actifs sur le bilan d'une banque et/ou sur un book de trading. Ces montages sont des structures de *true sale* dans lesquelles le transfert de propriété est effectivement réalisé. Le SPV est *bankruptcy remote*, c'est-à-dire qu'il est indépendant du risque de crédit relatif à la banque qui a arrangé la titrisation (appelée *originateur*). L'originateur peut le cas échéant toucher des revenus liés à l'activité du SPV, mais ne peut toucher les cash-flows payés par les actifs du SPV. De même, les investisseurs dans les notes émises par le SPV n'ont aucun recours sur l'originateur en cas de mauvaise performance de l'actif du SPV.

Le bilan d'un SPV est semblable à celui d'une banque spécialisée qui se financerait par émission d'actions, de dette subordonnée et de dette senior. Comme une banque, le SPV va émettre différentes "tranches" de dette de couples rendement / risque différents. Chacune de ces tranches reçoit une note par une ou plusieurs agences de notation. Les différentes tranches émises n'ont pas un risque équivalent :

- Le remboursement de la dette commence par les tranches les plus senior.
- Les pertes éventuelles impactent d'abord les tranches les plus junior

Plus précisément, la documentation contractuelle de la titrisation décrit comment les flux de principal et d'intérêt sont transférés aux différents intervenants dont les porteurs de notes. Cela s'appelle la *waterfall*. Il existe donc une waterfall d'intérêts et une waterfall de principal. Les flux d'intérêt servent à payer les frais liés au montage et les intérêts de la dette. Les flux de principal sont réinvestis dans du collatéral ou bien servent à rembourser les tranches de dette du SPV. Si les intérêts de la dette sont payés trimestriellement, les coupons détachés par les actifs du SPV sont stockés dans un compte d'intérêts puis, à la date de paiement trimestrielle, sont distribués de la façon suivante, par ordre de priorité :

- Taxes
- Frais d'administration du SPV
- Frais d'agence de rating
- Frais de gestion
- Paiement des intérêts de la tranche senior
- Paiement des intérêts de la tranche mezzanine
- Ce qui reste est appelé Excess spread et est généralement distribué aux porteurs de la tranche equity

Certaines transactions sont rechargeables, c'est-à-dire que le manager réinvestit tous les flux d'intérêt provenant des actifs dans de nouveaux actifs. Lorsque la transaction entre dans une période d'amortissement,

les flux de principal servant à rembourser les tranches de dette, avec un ordre de priorité décrit dans la documentation contractuelle.

La conséquence de la waterfall des flux de principal est d'intérêts est que les différentes tranches de dette du SPV ne portent pas la même quantité de risque, et par conséquent ne vont pas rémunérer les investisseurs de la même façon. Les tranches senior captent les flux de principal et d'intérêts en priorité par rapport aux tranches plus subordonnées et portent donc un risque plus faible puisqu'elles sont protégées par les premières tranches de dette. On appelle ce mécanisme le rehaussement de crédit. En revanche, les tranches subordonnées captent les cash-flows en dernier dans la waterfall et sont donc sensibles aux premières pertes sur le portefeuille d'actifs.

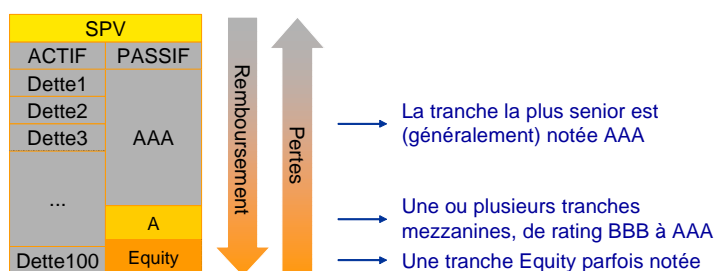


Figure 3.1: Mécanisme de fonctionnement du rehaussement de crédit

Il est utile de décrire le risque sur une tranche de CDO dans le langage de la théorie des options. Nous illustrons cela dans un exemple simple :

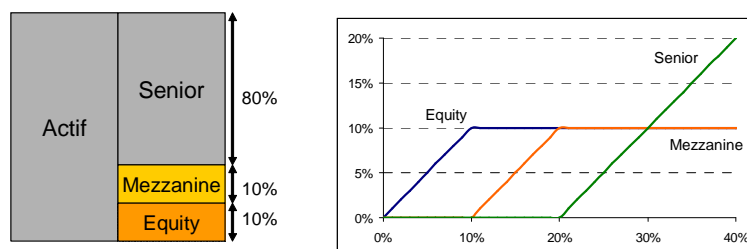


Figure 3.2: Description du passif d'un CDO dans le langage de la théorie des options

Ainsi, si le sous-jacent est la perte sur le portefeuille de crédit à l'actif du SPV, la perte sur chaque type de tranche est donnée par un payoff d'option :

- La perte sur la tranche senior est un call sur la perte du portefeuille
- La perte sur la tranche mezzanine est un call spread sur la perte du portefeuille
- La perte sur la tranche equity est un zéro-coupon moins un put sur la perte du portefeuille

Ces payoffs sont à rapprocher de la vision optionnelle du bilan d'une firme dans le modèle de Merton (voir ci-dessous), où l'equity est un call sur la valeur des actifs et la dette est un zéro-coupon moins un put sur la valeur des actifs.

Exercice : quel est changement de variable qui permet d'appliquer le modèle de Merton aux tranches de CDO ?

3.3 Typologie des structurés de crédit

En général, l'émission des notes par un SPV a pour but de financer l'achat des actifs du SPV. Ainsi, dans une émission de 200 MEUR de nominal de notes, le SPV va dépenser par exemple 4 MEUR en frais de montage, d'agence de rating, d'avocat, de structuration, et pourra donc investir dans un portefeuille d'actifs pour un montant égal 196 MEUR. Il existe des montages différents de celui-ci. Dans certains cas, le transfert de propriété d'un loan de la banque vers le SPV est juridiquement impossible. On réalise alors un transfert synthétique du risque via des CDS. Dans d'autres cas, il y a un réel intérêt économique utiliser un transfert de risque synthétique et à ne pas investir dans les obligations risquées (ceci est particulièrement vrai pour le corporate). On utilise en général un SPV dans ce type de montage appelé *synthétique* afin d'isoler le recours des porteurs de notes au risque de crédit transféré. Un CDS étant un produit dérivé, le SPV peut retransférer ce risque aux investisseurs via des swaps. On parle alors de structure *unfunded*. Les investisseurs peuvent a contrario préférer investir dans une note plutôt que dans un dérivé. Le SPV émet alors des notes et investit le cash obtenu de la vente dans un actif sans risque (GIC Guaranteed Investment Certificates par exemple). L'actif sans risque va servir à délivrer la partie euribor de la rémunération des investisseurs, et la marge au-dessus de l'euribor provient de l'exposition via les dérivés de crédit. On parle de structure *totally funded*. Il est très fréquent, notamment dans les structures synthétiques sur du risque corporate que les notes mezzanines soient funded et les notes les plus senior soient sous format de swap. On parle de structure *partially funded*.

Les ABS au sens large sont regroupés en trois catégories principales :

- Mortgage Backed Securities (MBS) : titres adossés à des prêts hypothécaires résidentiels (RMBS) ou commerciaux (CMBS)
- ABS (au sens restreint) : titres adossés à des portefeuilles granulaires, essentiellement sur un clientèle retail (encours cartes de crédit, auto loans, student loans...)
- Collateralized Debt Obligations (CDO) : obligations adossées à un pool d'une granularité moyenne (environ une centaine de noms)

La plupart des MBS sont adossés à des portefeuilles de prêts hypothécaires résidentiels (RMBS). Il s'agit en général de portefeuille granulaires de plusieurs milliers ou dizaines de milliers de prêts à taux fixe ou variable. La spécificité de ces prêts est l'option de remboursement anticipé dont les emprunteurs disposent : ils peuvent rembourser tout ou partie du prêt à n'importe quel moment, à des conditions prévues contractuellement. A l'émission des notes par le SPV, le pricing des différentes tranches est réalisé sur la base d'un certain taux moyen de prépaiement, par exemple 10%. Si le taux de prépaiement réalisé s'avère plus faible que 10% (en cas de hausse des taux par exemple), par exemple 5%, les notes émises

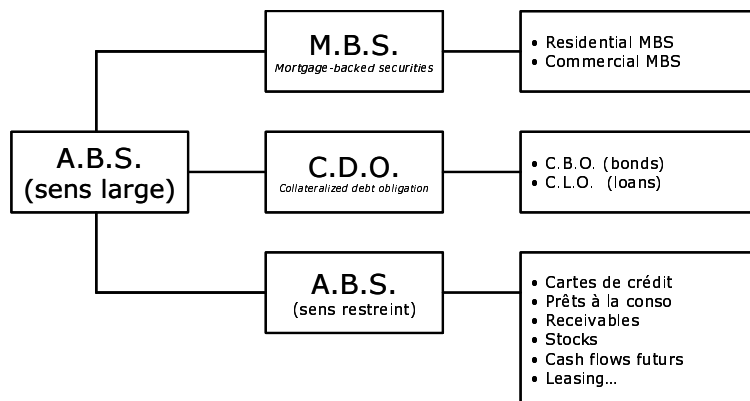


Figure 3.3: Typologie des Asset Backed Securities (ABS)

par le SPV vont s'amortir moins rapidement que prévu. Il s'agit du risque d'extension. Inversement, si les taux d'intérêt baissent, les emprunteurs vont avoir tendance à refinancer leur prêt et donc le taux de prépaiement va augmenter. Les notes émises par le SPV vont s'amortir plus rapidement ; c'est le risque de contraction. Aux Etats-Unis, les prêts immobiliers qui satisfont certains critères d'éligibilité (*conforming loans*) sont achetés, garantis et titrisés sous forme de MBS pass-through (pas de tranching de la dette) par des agences (GNMA, FNMA etc..). Les autres prêts (*non conforming loans*) sont souvent titrisés indépendamment des agences.

Les CMBS sont des titrisations adossées à des prêts d'immobilier commercial, c'est-à-dire garantis par des propriétés commerciales. Contrairement aux mortgages résidentiels dans lesquels le prêteur a un recours sur l'emprunteur en cas de manquement aux termes contractuels, les mortgages commerciaux sont sans recours. Le prêt n'est garanti que par les cash-flows engendrés par la propriété, et en cas de défaut celle-ci est vendue et les fruits de la vente servent à rembourser le prêt. En aucun cas il n'y a de recours sur le propriétaire. Parmi les types de collatéral des prêts, on a les immeubles d'appartements, de bureaux, les propriétés industrielles, des centres commerciaux, des hôtels, des maisons de retraite... Les transactions de CMBS se répartissent en 3 catégories : liquidating trusts (CMBS adossés à des prêts commerciaux en défaut), plusieurs propriétés et un seul emprunteur, conduits multipropriétés (CMBS sur des prêts originés dans le but d'être titrisés dans un second temps).

Le troisième type de MBS sont les Real Estate Investment Trusts (REITs). Il s'agit de sociétés qui achètent, développent, gèrent et vendent des actifs immobiliers. Les REITs bénéficient d'une exonération de taxe si plus de 75% de ses actifs sont des actifs immobiliers et si la société redistribue plus de 90% de ses revenus taxables sous forme de dividendes.

Les ABS non granulaires regroupent les cartes de crédit, les auto loans, les prêts à la consommation, les student loans, leasing, les actifs du secteur public, les aircraft leases, equipment loans, equipment leases... Les portefeuilles sous-jacents sont en général très granulaires et la zoologie de ces produits très fournie.

Les CLO (Collateralized Loans Obligations) représente une grosse part de l'univers des CDO. Les collatéral est composé de prêts bancaires (souvent senior unsecured) accordé à une clientèle d'entreprises

speculative grade ou non notée. On parle de dette *high yield* ou leveragée. Les CBO sont un autre type de CDO adossés à des portefeuilles d'obligations corporate. Le CBO recherche un bon mix entre le rendement (obtenu via une poche high yield) et le risque obtenu via une poche d'obligations investment grade. Enfin, il y a les Structured Finance CDO (ou CDO d'ABS) qui sont adossés à des tranches mezzanines d'ABS, de RMBS, de CMBS, et autres CDO. Les titrisations portant sur du private equity ou de fonds de hedge funds sont en général classées dans les CDO, de même que celles portant sur de la dette souveraine investment grade ; la dette émergente est en général classée différemment.

3.4 Intérêt des CDO

Les utilisations des CDO sont multiples :

- Gestion de bilan : initiée par les détenteurs de gros portefeuilles d'instruments de dette
- Vente directe de ces instruments de dette
- Transfert du risque sans la vente des instruments de dette
- Les banques ont de gros portefeuilles à cause de leur activité de prêt : elles recherchent une optimisation de leur consommation en fonds propres réglementaires et économiques
- CDO d'arbitrage : pour profiter du rendement positif apporté par la structuration
- Le coupon payé par l'actif du CDO est supérieur au coût du passif (ex : SIV)
- Les porteurs de la tranche equity perçoivent en général tout l'excess spread.

Les intérêts des investisseurs pour investir dans de telles structures sont également multiples :

- Rendement supérieur aux obligations corporate à rating équivalent
- Couple rendement / risque défini sur mesure pour l'investisseur
- Rendements peu corrélés aux autres marchés (Equity CDO)
- Diversification : produits structurés sur des pools d'actifs diversifiés
- Donne accès aux investisseurs à des marchés inaccessibles autrement
- Crée un marché pour des actifs illiquides
- Redistribue le risque dans les marchés de capitaux et touche une base d'investisseurs très étendue

La figure de gauche indique quels investisseurs achètent quelles tranches. En particulier, ne nombreux investisseurs apprécient les tranches les plus basses de la structure de capital. Le graphique de droite concerne les volumes d'investissement sur les tranches d'indices synthétiques. Nous remarquons en particulier que les investisseurs recherchent essentiellement l'effet de levier dans ces investissements.

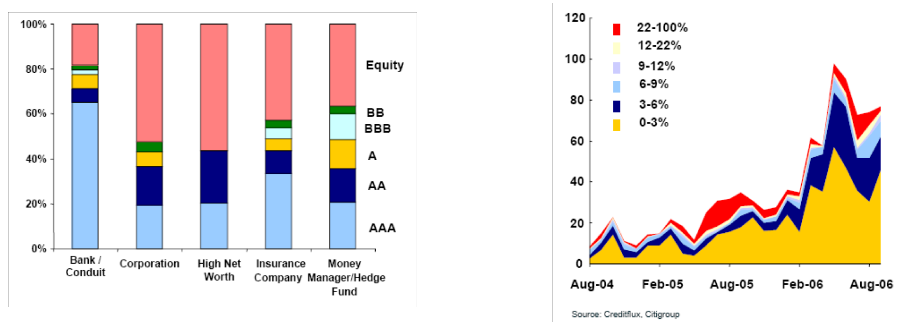


Figure 3.4: Typologie des investisseurs et des investissements dans les CDO

3.5 Economics d'un CDO

Le pricing d'un CDO revient à calibrer le spread payé à chaque tranche de dette de manière à réaliser plusieurs objectifs :

- Le pricing des tranches de dette est attractif pour les investisseurs, compte tenu de la classe d'actif, de la structure de la waterfall et du rating obtenu.
- Les flux d'intérêts dégagés par les actifs sont suffisants pour payer tous les frais senior, les intérêts de la dette et pour distribuer ce qui reste (appelé *Excess spread*) à la tranche equity.
- le rendement de la tranche equity est attractif pour les investisseurs, qui ne disposent d'aucun mécanisme de rehaussement de crédit.

Les objectifs de rendement pour les investisseurs, conjugués aux contraintes de viabilité de la structure définissent ce qu'on appelle les *economics* du CDO.

Nous allons illustrer les economics d'un CDO dans un exemple simple. Considérons un CDO qui émet 6 tranches pour un montant de 200 MEUR. Les tranches de dettes sont nommées par une lettre, A1 désignant la tranche super-senior et F la tranche equity. Le portefeuille d'actifs verse des coupons égaux à euribor 3M + 140 bp. La structure du passif du CDO est la suivante :

Tranches	Taille (%)	Taille (M€)	Spread
A1	73.00%	146	0.18%
A2	3.00%	6	0.25%
B	6.00%	12	0.45%
C	6.00%	12	0.70%
D	6.00%	12	1.60%
E	1.25%	2.5	3.50%
F	4.75%	9.5	

Figure 3.5: Structure de passif d'un CDO

Par ailleurs, le montage du CDO a engendré des frais d'avocat, de structuration, d'agences de rating pour un montant total de 4 MEUR. Ainsi, seul 196 MEUR pourront être investis à l'actif du SPV. Le

fonctionnement du SPV engendre également un certain nombre de frais dits *running* (payés trimestriellement) pour un montant de 10 bp sur la base d'une assiette de 200 MEUR, auxquels s'ajoutent 15 bp de frais de gestion senior et 10 bp de frais de gestion junior. Considérons un niveau des taux 4.5%. La waterfall d'intérêts en fin de chaque période trimestrielle est schématiquement la suivante dans le scénario où le portefeuille ne subit aucun défaut :

- Frais administratifs : $10 \text{ bp} * 200 \text{ MEUR} * 0.25 = 50\,000 \text{ EUR}$
- Frais de gestion senior : $15 \text{ bp} * 200 \text{ MEUR} * 0.25 = 75\,000 \text{ EUR}$
- Intérêts tranche A1 : $18 \text{ bp} * 146 \text{ MEUR} * 0.25 = 1\,708\,200 \text{ EUR}$
- Intérêts tranche A2 : $25 \text{ bp} * 6 \text{ MEUR} * 0.25 = 71\,250 \text{ EUR}$
- Intérêts tranche B : $45 \text{ bp} * 12 \text{ MEUR} * 0.25 = 148\,500 \text{ EUR}$
- Intérêts tranche C : $70 \text{ bp} * 12 \text{ MEUR} * 0.25 = 156\,000 \text{ EUR}$
- Intérêts tranche D : $160 \text{ bp} * 12 \text{ MEUR} * 0.25 = 183\,000 \text{ EUR}$
- Intérêts tranche E : $350 \text{ bp} * 2.5 \text{ MEUR} * 0.25 = 50\,000 \text{ EUR}$
- Frais de gestion junior : $10 \text{ bp} * 200 \text{ MEUR} * 0.25 = 50\,000 \text{ EUR}$

Le total des frais administratifs et de gestion s'élève à 175 000 EUR par trimestre (35 bp par an), le total du coût de la dette à 2 316 150 EUR par trimestre. Par ailleurs le flux d'intérêt s'élève à 2 950 000 EUR par trimestre. L'excess spread, qui revient à l'investisseur de la tranche equity est donc égal à 458 050 EUR, ce qui représente un coupon annualisé de 19.3% pour la tranche equity.

Les investisseurs equity veulent en général calculer la rentabilité de leur investissement grâce au Taux de Rendement Interne (TRI, ou IRR pour Internal Rate of Return en anglais). L'IRR est le taux d'actualisation qui annule la present value (PV) de l'ensemble des cash-flows que touche l'investisseur equity. Celui-ci investit 100 Euros initialement et touche un coupon trimestriel de $19.3 * 0.25$. A maturité du CDO, par exemple 8 ans, si le portefeuille d'actifs n'a subi aucune perte et est revendu au pair, l'investisseur equity ne récupérera pas l'intégralité de son investissement car les 200 MEUR collectés initialement au lancement du CDO n'ont été investi que dans 196 MEUR de collatéral. Ainsi, il va récupérer seulement $5.5/9.5 * 100 = 57.9$ en principal. Le dernier flux est donc la somme du flux de principal et du dernier flux d'intérêt, ie $57.9 + 4.825 = 62.325$. La séquence des cash-flows est donc la suivante :

$$-100 \quad 4.825 \quad 4.825 \quad \dots \quad 4.825 \quad 62.325$$

L'IRR est la variable ρ solution de l'équation :

$$-100 + \sum_{t_i=0.25}^8 \frac{4.825}{(1+\rho)^{t_i}} + \frac{57.9}{(1+\rho)^8} = 0$$

On obtient un IRR $\rho = 17.8\%$ qui est inférieur au taux de coupon versé à l'equity car le montant de principal rendu à l'investisseur equity est en dessous du pair.

3.6 Collateralized Synthetic Obligations (CSO)

Suite à la publication des normes ISDA sur les dérivés de crédit en 1999 (puis amendées en 2003), les volumes traités sur les dérivés de crédit ont explosé dans les années 2000. La créativité des banques d'investissement a alors rendu le marché des CSO particulièrement dynamique, car les payoffs proposés aux clients se sont multipliés, de façon à s'adapter aux conditions de marché du moment.

L'exemple le plus simple de CSO est celui d'une vente de protection sur une tranche de CDO. Le format juridique de ce contrat est un swap, au même titre qu'un CDS. L'acheteur de protection paie un spread constant au vendeur de protection, sur la base du nominal en vie de la tranche et jusqu'à maturité. Le nominal en vie est égal au recouvrement que l'on aurait sur la tranche si on liquidait la structure tout de suite. Inversement, chaque fois qu'un défaut survient et que le nominal en vie de la tranche est modifié, le vendeur de protection paie cette variation à l'acheteur de protection.

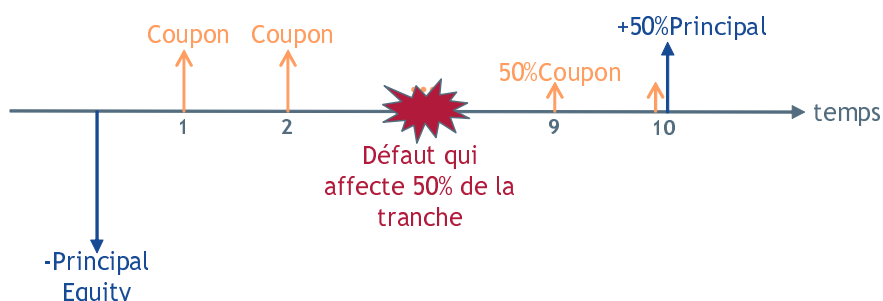


Figure 3.6: Cash-flows d'une tranche de CDO

***** Implied correlation / base correlation

Structurés sur indices *****

3.7 Pricing et couverture des CSO

Dans ce paragraphe, nous détaillons les calculs dans le cadre du portefeuille homogène infiniment granulaire. En effet, dans ce cadre, nous avons des formules semi-explicites pour la perte moyenne à chaque date pour n'importe quelle tranche, et par conséquent, nous sommes en mesure de donner une formule de pricing pour la tranche. Il est alors aisé de calculer le spread de la tranche numériquement, et d'en déduire les sensibilités et ratios de couverture. Dans un second temps, nous calculerons le levier de la tranche et appliquerons cette notion au calcul du couple rendement-risque d'un investissement dans une tranche de CDO.

Nous considérons une tranche qui attache au point A et détache au point D . On suppose un niveau de recouvrement fixe égal à R (la convention de marché est de prendre $R = 40\%$). Nous calculons dans un premier temps la perte espérée (risque-neutre) EL_t à la date t sur la tranche. Nous supposons que la loi du temps de défaut pour chaque ligne du portefeuille est la loi exponentielle de fonction de répartition

$P[\tau \leq t] = 1 - \exp(-\lambda t)$. La perte sur le portefeuille est donc une fonction qui ne dépend plus que du facteur macro-économique F dans la limite granulaire :

$$L(t, F) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1-R}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\{\sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}\epsilon_i \leq N^{-1}(F(t))\}} = (1-R)N \left[\frac{N^{-1}(F(t)) - \text{sqrtr}\rho F}{\sqrt{1-\rho}} \right]$$

Par conséquent, la perte moyenne sur la tranche s'écrit :

$$EL_t = E [(L(t, F) - A)^+ - (L(t, F) - D)^+]$$

La jambe variable du swap est la jambe payeuse de perte. La PV des perte s'écrit :

$$JV = \int_0^T e^{-rt} dEL_t = e^{-rT} EL_T + r \int_0^T e^{-rt} EL_t dt$$

La jambe fixe a une valeur de marché égale à la PV des flux de spread, payés sur le nominal en vie de la tranche. Le nominal en vie de la tranche est égal au nominal de la tranche moins la perte sur la tranche, ie $D - A - L(t, F)$. Il vient donc :

$$\begin{aligned} JF &= \int_0^T e^{-rt} (D - A - EL_t) dt = e^{-rT} EL_T + r \int_0^T e^{-rt} EL_t dt \\ &= \frac{D-A}{r} (1 - e^{-rT}) - \frac{1}{r} (JF - e^{-rT} EL_T) \end{aligned}$$

Le fair spread de la tranche est donc le ratio $s = JF/JV$. Lorsque $A \neq 0$, on doit utiliser des corrélations différentes pour pricer les tranches equities $[0, A]$ et $[0, D]$ (corrélations de base). On utilise donc les formules ci-dessus pour les jambes fixes et variables des deux tranches equities. Le fair-spread est donc donné par la formule suivante :

$$s = \frac{JF(D, \rho_D) - JF(A, \rho_A)}{JV(D, \rho_D) - JV(A, \rho_A)}$$

Lorsqu'une banque achète une protection sur une tranche $[A, D]$, elle prend le risque de devoir payer des flux de perte en cas de défauts sur le portefeuille sous-jacent. Pour couvrir la variation du prix de marché de sa position acheteuse de protection sur la tranche, elle va acheter de la protection via les CDS des noms de référence sous-jacents. Le trader veut donc trouver les ratios de couverture Δ_i sur chaque CDS pour annuler la sensibilité de son book à une variation des spreads s_i de chaque CDS sous-jacent. Son portefeuille contient donc la position acheteuse de protection sur la tranche dont la valorisation mark-to-market est notée $V_{TR}(t)$ et une position vendeuse de protection sur chaque CDS. La valorisation du portefeuille ainsi constitué est :

$$P(t) = \sum_i \Delta_i V_{CDS_i}(t) - V_{TR}(t)$$

La condition de couverture s'écrit, pour tout k :

$$\frac{\partial P(t)}{\partial s_k} = 0$$

On en déduit la valeur du ratio de couverture pour le CDS numéro k :

$$\Delta_k = -\frac{1}{DV_k} \frac{\partial V_{TR}(t)}{\partial s_k}$$

Il existe donc un delta par crédit et par tranche. Dans le cas du portefeuille granulaire, la notion de delta qui a du sens est la sensibilité de la valeur de marché d'une tranche par rapport à une translation des spreads ; pour un acheteur de protection sur la tranche, on a :

$$\Delta = \frac{1}{DV} \frac{\partial(JV - JF)}{\partial s}$$

Le terme DV est la DV de chacun des CDS sous-jacents. Il ressort de cette définition que la somme des delta de chaque tranche du CDO est égale à 100%, ie le delta du portefeuille dans son intégralité. Une façon de mieux apprécier l'effet de levier d'une tranche est de ramener le Δ à l'épaisseur de la tranche. Si une tranche a un delta de 10%, cela signifie qu'elle capte 10% du risque du portefeuille sous-jacent. En effet, si le portefeuille de CDS a une valeur de marché qui varie de 1 MEUR, celle de la tranche va varier de 100 000 EUR. L'effet de levier ne sera donc pas le même si la tranche a une épaisseur de 2 MEUR ou de 20 MEUR. Dans le premier cas, la valorisation de la tranche va varier de 5% contre 0.5% dans le second cas. On définit donc le levier d'une tranche :

$$L = \frac{\Delta}{D - A}$$

Le levier permet d'apprécier très rapidement le couple rendement / risque offert par une tranche de CDO ou une stratégie de tranches. Pour une tranche de spread s_{TR} et de levier L , on calcule aisément la volatilité du mark to market de la tranche à partir de la volatilité des spreads des CDS sous-jacents :

$$\sigma_{TR} = L \cdot DV \cdot \sigma_s$$

Ainsi, le ratio de Sharpe d'une tranche est donné par :

$$S = \frac{s_{TR}}{L \cdot DV \cdot \sigma_s}$$

Pour fixer les idées, prenons une tranche equity de levier $L = 20$. Si on considère que la volatilité des spreads des CDS est de 3 bp par jour, on obtient $\sigma_s = 0.02\% \times \sqrt{250} = 0.32\%$. Si la DV des CDS sous-jacents est de 5, on obtient la volatilité de la tranche : $\sigma_{TR} = 20 \times 5 \times 0.32\% = 31.6\%$.

Chapter 4

Modèles de portefeuille

4.1 Dépendance

La notion de dépendance est centrale dans l'analyse des risques d'un portefeuille. L'outil habituellement utilisé pour modéliser les dépendances est la corrélation que les gens utilisent souvent de façon erronée et abusive. On trouve, dans la littérature de vulgarisation, dans le langage courant et même dans les discussions entre experts, tout un festival d'âneries et d'abus de langage au sujet des corrélations.

On voit souvent l'amalgame entre la notion de corrélation et celle de dépendance. Il se trouve en réalité que deux événements corrélés sont dépendants entre eux, mais que la réciproque est fautive : on peut avoir des variables aléatoires dépendantes mais présentant un facteur de corrélation nul. Par exemple, si X est une variable aléatoire gaussienne, alors les variables X et X^2 , qui sont fortement dépendantes l'une de l'autre, mais qui ont une corrélation égale à 0. La corrélation est une mesure partielle de la dépendance. La corrélation définit bien la notion de dépendance dans le cas des composantes d'un vecteur gaussien bivarié, mais la théorie de la dépendance entre variables aléatoires se doit d'aller au-delà de ce cas particulier. Avant de donner un aperçu de la théorie des copules, nous donnons quelques exemples de contre sens (ou de non sens) que l'on rencontre au sujet des corrélations.

Exemple 1 "Sur les 9 grandes économies, les corrélations des marchés actions sont de l'ordre de 50% depuis les années 60. En d'autres termes, pour toute hausse (baisse) de 1% aux Etats-Unis par exemple, les prix d'actions sur les autres marchés vont typiquement monter (baisser) de 0.5%." (The Economist, 8 nov. 1997)

Exemple 2 " Une corrélation de 50% ne signifie pas que le rendement de l'action A va être égal à 50% du rendement de l'action B ou vice-versa... Une corrélation de 50% signifie que dans 50% du temps le rendement de l'action A va être corrélé positivement au rendement de l'action B et dans 50% du temps, il ne le sera pas. " (The Economist (letter), 22 nov. 1997)

Exemple 3 " Les lois marginales et les corrélations suffisent pour déterminer la loi jointe "

- Vrai pour les distributions elliptiques (dont la distribution binormale est un exemple)

- Faux en général

Exemple 4 ” Si on connaît les lois marginales des variables X et Y , toute corrélation entre -1 et $+1$ peut être atteinte à condition de spécifier correctement la loi jointe”

- Vrai sur les distributions elliptiques. Faux en général : si les lois de X et Y ne sont pas du même type, la corrélation de X et Y est strictement inférieure à 1
- L'ensemble des corrélations atteignables est un intervalle fermé inclus dans l'intervalle $[-1, 1]$. Un exemple classique est celui de deux variables lognormale centrées en 0 et de paramètres de volatilité σ_1 et σ_2 respectivement.

De façon intuitive, la notion de corrélation peut être appréhendée au niveau de la probabilité que deux variables normales centrés soient de même signe par exemple. Posons $X_2 = \rho X_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \epsilon$, où X_1 et ϵ sont deux variable aléatoires normales centrées réduites. Alors, X_2 est une variable aléatoires normale centrée réduite, et nous avons par définition :

$$P(X_1 < 0, X_2 < 0) + P(X_1 > 0, X_2 > 0) = 2N_2(0, 0, \rho)$$

La fonction $N_2(a, b, \rho)$ est la loi normale bivariée :

$$N_2(a, b, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^a dx \int_{-\infty}^b dy \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right]$$

On en déduit que la probabilité que les variables X_1 et X_2 soient de même signe, est égale à :

$$P(\rho) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \rho \right) \sim \frac{1}{2} + \frac{\rho}{\pi}$$

La démonstration s'obtient en posant dans un premier temps $z = (y - \rho x)/\sqrt{1 - \rho^2}$. On obtient alors :

$$N_2(0, 0, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^{-\rho x/\sqrt{1-\rho^2}} dz \exp\left[-\frac{x^2 + z^2}{2}\right]$$

On se place en coordonnées polaires en posant $x = r \cos \theta$ et $z = r \sin \theta$, puis on utilise la relation $\arctan \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = \arcsin \rho$ pour obtenir le résultat.

Comme nous le voyons sur le graphique ci-dessous, l'approximation linéaire est valable sur une large plage de valeurs de la corrélation ($|\rho| \leq 60\%$).

La notion de copule définit dans son sens le plus général la dépendance entre variables aléatoires et son intérêt majeur est fournir un cadre conceptuel rigoureux à la notion de dépendance. Considérons deux variables aléatoires de fonction de répartition définies ainsi :

$$F_i(t) = P[X_i \leq t]$$

Introduisons également leur loi jointe qui contient toute l'information sur la dépendance et les lois marginales entre les deux variables :

$$F(t_1, t_2) = P[X_1 \leq t_1, X_2 \leq t_2]$$

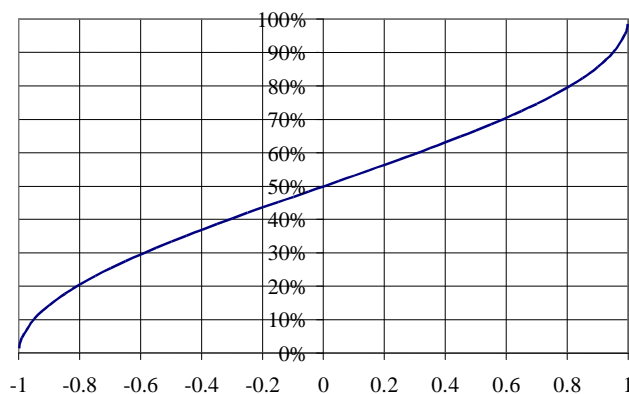


Figure 4.1: Probabilité en fonction de la corrélation

Les deux variables X_1 et X_2 sont indépendantes si $F(t_1, t_2) = F_1(t_1).F_2(t_2)$. On en déduit immédiatement que si deux variables sont indépendantes, leur corrélation est nulle, la réciproque étant fautive comme nous l'avons vu précédemment.

Le théorème de Sklar stipule que si les fonctions de répartition des variables X_1 et X_2 sont bijectives sur l'intervalle $[0,1]$, alors il existe une unique fonction de deux variables $C(u, v)$ telle que :

$$F(t_1, t_2) = C(F_1(t_1), F_2(t_2))$$

Cette fonction $C(\cdot, \cdot)$ est la fonction copule. Elle contient toute l'information sur la dépendance entre X_1 et X_2 , mais aucune information sur leurs lois marginales. Le théorème de Sklar démontre l'existence d'une décomposition de la fonction de répartition multivariée en une information sur les lois marginales et une information sur la dépendance au travers de la fonction copule.

Copule gaussienne

La copule gaussienne Soient X_1, X_2 et Z deux variables aléatoires normales centrées réduites telles que :

$$X_2 = \rho X_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z$$

La structure de dépendance entre X_1 et X_2 est la copule gaussienne de paramètre de corrélation ρ . Nous pouvons écrire explicitement la copule car on connaît la loi jointe du vecteur gaussien bivarié défini par X_1 et X_2 .

$$P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2] = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{x_1} dx \int_{-\infty}^{x_2} dy \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right]$$

On en déduit la formule de la copule gaussienne bivariée :

$$C(u_1, u_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{N^{-1}(u_1)} dx \int_{-\infty}^{N^{-1}(u_2)} dy \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right]$$

Copules archimédiens

Soit Ψ la classe des fonctions φ définies sur l'intervalle $[0,1]$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, continues, strictement croissantes, convexes et telles que $\varphi(1) = 0$. Alors, pour toute fonction $\varphi \in \Psi$, on peut définir la copule

archimédienne suivante de générateur φ :

$$C_\varphi(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

On remarque que la copule indépendante est une copule archimédienne de générateur $\varphi(t) = -\ln t$. Par ailleurs, nous avons les exemples suivants :

$$\text{Gumbel } \varphi(t) = t^{-\alpha} - 1 \quad (\alpha > 1)$$

$$\text{Clayton } \varphi(t) = (-\ln t)^\alpha \quad (\alpha \geq 1)$$

$$\text{Franck } \varphi(t) = \ln \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^\alpha - 1}$$

Copule t de Student

Comme pour la copule Gaussienne, la copule t (ou copule de Student) est la fonction de dépendance associée à la distribution t multidimensionnelle. Soit Σ une matrice diagonale définie positive avec $\text{diag } \sigma = 1$ et $t_{\rho, \nu}$ la distribution de Student multivariée standard à ν degrés de liberté et de matrice de corrélation ρ . La copule de Student est alors définie de la façon suivante :

$$C(u_1, \dots, u_n; \rho) = t_{\rho, \nu}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_n))$$

Dépendance de queue

Cette notion est très importante dans l'étude de la dépendance asymptotique entre deux variables aléatoires. Cela va nous permettre de voir le niveau de dépendance dans les valeurs extrêmes (upper tail dependence) et dans les valeurs petites (lower tail dependence). Ce concept sera totalement basé sur celui des copules.

Upper tail dependence

L'objet est donc l'étude de la dépendance dans la queue commune de la distribution bivariée. Prenons donc deux variables aléatoires continues X et Y ayant pour fonction de distribution respectives F_X et F_Y . Le coefficient d' "upper tail dependence" de X et Y est défini, si toutefois cette limite existe, par :

$$\lambda_u = \lim_{u \rightarrow 1^-} P[Y > F_Y^{-1}(u) | X > F_X^{-1}(u)] = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{C(u, u) - 2u + 1}{1 - u}$$

La quantité λ_u est seulement une fonction de la copule et ne dépend pas des lois marginales. Si cette quantité est non nulle, il existe une dépendance asymptotique entre les variables. Si $\lambda_u = 0$, on parle d'indépendance asymptotique. La copule la plus fréquemment donnée en exemple dans la littérature pour illustrer ce concept est celle de Gumbel. Dans ce cas, nous avons après calculs :

$$\lambda_u = 2 - 2^{1/\alpha}$$

La dépendance asymptotique dans le cas de la copule de Gumbel tend vers 1 lorsque $\alpha \rightarrow \infty$. A l'inverse la copule gaussienne ne présente aucune dépendance asymptotique.

Lower tail dependence

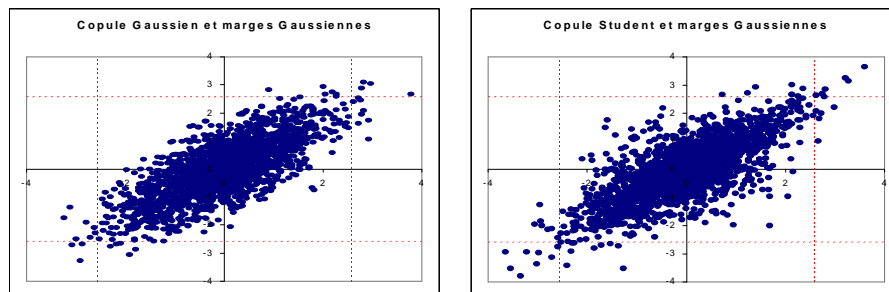
En gardant, les mêmes notations qu'auparavant, le coefficient de "lower tail dependence" de X et Y est défini comme étant :

$$\lambda_l = \lim_{u \rightarrow 0^+} P[Y < F_Y^{-1}(u) | X < F_X^{-1}(u)] = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}$$

si cette limite existe. Dans l'exemple de la copule de Clayton, on a :

$$\lambda_l = 1/2^\alpha$$

Pour illustrer la notion de dépendance de queue, nous représentons ci-dessous deux nuages de points de deux variables aléatoires normales centrées réduites liés par deux copules différentes. Dans les deux cas, la corrélation entre ces deux variables aléatoires est de 70%.



Nous voyons sur ces graphiques que la copule gaussienne engendre moins d'événements extrêmes simultanés sur les deux axes, contrairement à la copule de Student.

4.2 PD, LGD et EAD

Le risque de crédit sur une opération avec un client de la banque, sur un horizon de temps donné, dépend de trois éléments : la probabilité de défaut, la perte en cas de défaut et l'exposition au moment du défaut. La probabilité de défaut du client dépend de sa qualité de crédit, mesurée par le rating. Les agences de notation ont en effet pour rôle d'attribuer une note à chaque entreprise sur une échelle mesurant sa qualité de crédit. On distingue deux types d'entreprises, celles dont le risque de ne pas honorer ses engagements est faible (on parle d'entreprises investment grade) est celles dont le risque de crédit à court ou moyen terme est élevé (on parle de speculative grade). Les historiques de défauts recueillis par les agences de notation permettent d'estimer la probabilité de défaut associée à chaque niveau de rating.

4.2.1 Loi des pertes sur le portefeuille

La modélisation des pertes sur un portefeuille de crédit repose sur la connaissance des paramètres de risque sur chaque ligne du portefeuille et sur les dépendances des pertes. Dans certains cas, toutefois, il est possible de donner des propriétés sur la loi des pertes de crédit d'un portefeuille.

Une première propriété de cette loi des pertes de crédit vient du fait que la loi des pertes d'un portefeuille est à support compact (en l'occurrence l'intervalle $[0,1]$). Cela contraint de manière considérable la loi des pertes. Par exemple, si on suppose que la loi des pertes a une espérance μ , il est clair que l'écart type de ces pertes est majoré (il est au moins majoré par 1). En effet :

$$E[L^2] = \int_0^1 dx x^2 f(x) \leq \int_0^1 dx x f(x) = \mu$$

Par conséquent, la variance des pertes d'une portefeuille de crédit est majorée par $\mu(1 - \mu)$, qui est la variance correspondant à un portefeuille de crédit des pertes qui suivent une loi de Bernoulli. De même, tous les moments de la loi des pertes sont contraints, et on comprend qu'il y a deux types de lois qui vont jouer un rôle important : d'une part la loi de Dirac centrée sur μ , et d'autre part la loi de Bernoulli avec une masse de Dirac de poids $1 - \mu$ en 0 (pas de perte sur le portefeuille) et une masse de Dirac de poids μ en 1 (perte de 100% sur le portefeuille). Entre ces deux cas extrêmes, la modélisation du portefeuille de crédit permet de calibrer des mesures quantitatives du risque de crédit.

Il existe un cas dans lequel la loi statistique des pertes sur le portefeuille se calcule exactement. Considérons un portefeuille de crédit de n lignes équipondérées. Sur un horizon de temps d'une période (un an par exemple), nous modélisons le défaut de la ligne i à l'aide d'une variable cachée R_i normale centrée réduite ; l'événement de défaut est modélisé par une variable de Bernoulli :

$$L_i = 1_{\{R_i < s_i\}}$$

La valeur de s_i est le seuil de déclenchement du défaut. La probabilité de défaut associée à la ligne i est donc par définition $N(s_i)$. Dans un cas réaliste, les défauts sont corrélés, et une manière de modéliser cela consiste à introduire la dépendance sur les variables d'état R_i . Nous considérons un portefeuille homogène, dans lequel toutes les lignes ont la même probabilité de défaut ($s_i = s$ pour tout i), et toutes les corrélations de défaut deux à deux sont égales à $\text{corr}(R_i, R_j) = \rho$. Si nous introduisons une variable normale centrée réduite F et n autres variables normales centrées réduites ϵ_i toutes indépendantes, nous pouvons poser :

$$R_i = \sqrt{\rho}F + \sqrt{1 - \rho}\epsilon_i$$

Alors, toutes les variables d'état R_i sont des variables normales centrées réduites et ont des corrélations deux à deux toutes égales à ρ .

L'interprétation économique du facteur F est qu'il s'agit d'un facteur de risque systémique, commun à toutes les lignes du portefeuille. Les facteurs ϵ_i sont les facteurs spécifiques à chaque ligne. Le paramètre de corrélation apparaît comme un facteur de sensibilité à la conjoncture économique. La perte totale en pourcentage sur le portefeuille s'écrit (taux de recouvrement choisi nul) :

$$L_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{R_i < s_i\}} = \sum_{i=1}^n 1_{\{\epsilon_i < \frac{s - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1 - \rho}}\}}$$

En conditionnant sur le facteur systémique F , la perte sur le portefeuille s'écrit comme une somme de variables aléatoires iid. On peut donc appliquer la loi des grands nombres :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L = P \left[\epsilon_i < \frac{s - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1 - \rho}} \middle| F \right] = N \left(\frac{s - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1 - \rho}} \right)$$

On connaît donc la loi statistique des pertes dans ce cas particulier :

$$P(L \leq x) = N \left[\frac{\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x)}{\sqrt{\rho}} \right]$$

La densité des pertes s'écrit :

$$f(x, s, \rho) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\rho}} \exp \left[-\frac{1}{2\rho} \left(\sqrt{1-\rho}N^{-1}(x) - s \right)^2 + \frac{1}{2} \left(N^{-1}(x) \right)^2 \right]$$

On en déduit l'espérance et la variance des pertes :

$$E(L) = \int_{-\infty}^{\infty} dF n(F) N \left(\frac{s-\sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right) = N(s)$$

$$\text{var}(L) = N_2(s, s, \rho) - N(s)^2$$

Démontrons le premier résultat. Ce type d'intégrale se calcule en écrivant la fonction de répartition de la loi normale comme une intégrale de la densité de la loi normale :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dF n(F) N \left(\frac{s-\sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} dF n(F) \int_{-\infty}^{\frac{s-\sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}} n(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dF n(F) \int_{-\infty}^s n \left(\frac{z-\sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right) \frac{dz}{\sqrt{1-\rho}} \end{aligned}$$

On a obtenu la dernière égalité en faisant le changement de variable $y = \frac{z-\sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}}$; on intervertit alors les deux intégrales et on calcule l'intégrale gaussienne sur la variable F :

$$\begin{aligned} E(L) &= \int_{-\infty}^s \frac{dz}{\sqrt{1-\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} dF n(F) n \left(\frac{z-\sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right) \\ &= \int_{-\infty}^s dz n(z) \\ &= N(s) \end{aligned}$$

Le calcul de $E(L^2)$ s'effectue de même, en utilisant toujours le même changement de variable. Le graphe ci-dessous représente la volatilité des pertes sur le portefeuille de crédit en fonction du niveau de corrélation.

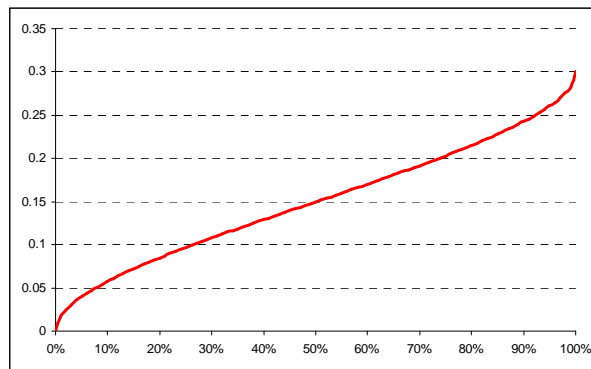


Figure 4.2: Impact de la volatilité des pertes de crédit en fonction du niveau de corrélation

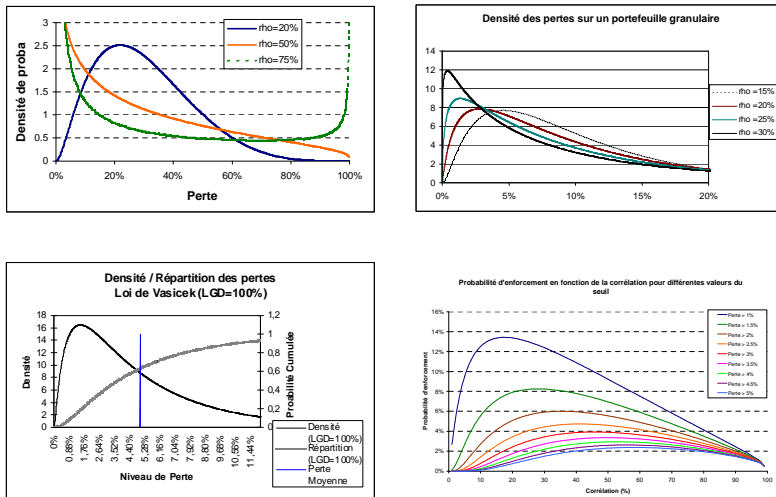
Pour tout $\rho < 50\%$, la loi des pertes du portefeuille est unimodale et le mode vaut :

$$L_m = N \left(\frac{\sqrt{1-\rho}}{1-2\rho} s \right)$$

Lien entre corrélation d’actifs et volatilité des pertes

Dans le modèle à une période que nous venons de décrire, lorsque la corrélation d’actifs est nulle, tous les défauts sont indépendants, et la loi des pertes est un pic de Dirac centré sur la perte moyenne du portefeuille car le portefeuille contient une infinité de lignes. Dans l’autre cas extrême, $\rho = 1$, et tous les actifs ont le même comportement : soit aucun ne fait défaut, soit ils font tous défaut. La loi des pertes du portefeuille dans ce cas est composée de deux masses de Dirac centrées sur 0 et 1. Entre ces deux situations il y a toutes les valeurs de la corrélation entre 0 et 1, qui engendrent une loi tout d’abord fortement piquée sur 0 puis qui s’élargit au fur et à mesure que la corrélation augmente. Lorsque la corrélation dépasse le niveau de 50%, la densité des pertes passe d’une fonction unimodale à une distribution bimodale, les deux modes étant localisés en 0 et 1.

On en déduit la fonction de densité de probabilité de la perte sur le portefeuille (cf exercice). Celle ci comporte plusieurs modes qui correspondent à une corrélation faible entre les actifs (et correspondra dans la majeure partie des cas à la réalité), une corrélation élevée et enfin une corrélation intermédiaire :



Diversification en rating

Il est instructif de regarder à la lumière du modèle de Vasicek le cas d’un portefeuille granulaire que ne serait pas homogène en rating. En particulier, on peut modéliser l’inhomogénéité du portefeuille en considérant que le seuil de défaut s_i pour chaque ligne du portefeuille est lui-même une variable aléatoire centrée sur s_0 et de variance σ^2 . Nous posons alors $s_i = s_0 + \sigma\tilde{\epsilon}_i$, où les variables $\tilde{\epsilon}_i$ sont des variables normales centrées réduites indépendantes entre elles, indépendantes du facteur systémique F et des variables spécifiques ϵ_i . La condition du défaut pour chaque ligne du portefeuille s’écrit alors :

$$\sqrt{\rho}F + \sqrt{1 - \rho}\epsilon_i < s_0 + \sigma\tilde{\epsilon}_i$$

Il vient alors pour la variable de perte sur l’ensemble du portefeuille :

$$L = N \left(\frac{s_0 - \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1 - \rho + \sigma^2}} \right)$$

Calcul du s' et ρ'

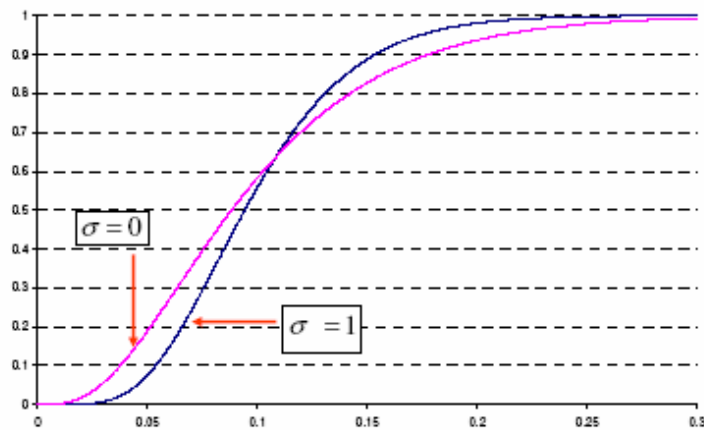


Figure 4.3: Impact de la volatilité du seuil de défaut sur la distribution des pertes du portefeuille

Pour un taux de défaut moyen de 10% sur le portefeuille, on constate que la variance des pertes diminue avec le paramètre d'inhomogénéité σ du portefeuille. En effet, l'ajout d'un aléa supplémentaire dans le problème vient diversifier un peu plus le portefeuille. Pour le dire autrement, un portefeuille hétérogène en rating contient moins d'incertitude quant-au nombre de défauts sur un horizon donné qu'un portefeuille homogène en rating. En effet, un portefeuille hétérogène, en grossissant le trait, est composé de ligne de bons ratings qui ont peu de chance de faire défaut et de lignes mal notées qui ont une bonne chance de faire défaut. Cet effet serait atténué si les seuils, tout en restant aléatoires, étaient corrélés au facteur systémique F .

Corrélations d'actifs, corrélations de défauts

En matière de risque de crédit, on distingue les corrélations d'actifs, les corrélations de défaut et les corrélations de pertes et les corrélations de temps de défaut. Chaque type de grandeur fait référence un type de modélisation du risque de défaut. Les corrélations d'actifs font référence aux modèles structurels, alors que les corrélations de temps de défaut font référence au paramètre de corrélation de la copules gaussienne dans les modèles intensité. Il est toutefois possible dans une modélisation donnée du risque de défaut de faire le lien entre les différents types de corrélations. Par exemple, dans le modèle structurel, on écrit la corrélation des défauts de la façon suivante :

$$\rho_D = \frac{E[1_{\{R_1 \leq s_1\}} \cdot 1_{\{R_2 \leq s_2\}}] - E[1_{\{R_1 \leq s_1\}}] \cdot E[1_{\{R_2 \leq s_2\}}]}{\sqrt{PD_1(1 - PD_1)} \sqrt{PD_2(1 - PD_2)}}$$

On en déduit le lien entre la corrélation d'actifs et la corrélation des défauts dans le modèle de Merton :

$$\rho_D = \frac{N_2(s_1, s_2, \rho) - N(s_1) \cdot N(s_2)}{\sqrt{N(s_1)(1 - N(s_1))} \sqrt{N(s_2)(1 - N(s_2))}}$$

La fonction $N_2(s_1, s_2, \rho)$ est une fonction croissante de la corrélation, donc la corrélation de défaut est également croissante en fonction de la corrélation d'actifs. Or $\lim_{\rho \rightarrow 1} N_2(s_1, s_2, \rho) = \min(N(s_1), N(s_2))$. La corrélation de défaut est maximale lorsque les probabilités de défaut sont égales, et dans ce cas, on peut avoir une corrélation de défaut égale à 1. Si les probabilités marginales de défaut sont différentes,

toutes les valeurs des corrélations de défaut ne sont pas atteignables.

Chapter 5

La mesure du risque

5.1 Axiomatique du risque

Delbaen et al. ont proposé 4 propriétés de cohérence que doit satisfaire une bonne mesure de risque. Chacune de ces propriétés repose sur une intuition financière.

- Monotonie : si la probabilité de perte sur un portefeuille est toujours supérieure à celle d'un deuxième alors leurs mesures de risque sont dans le même sens

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$$

- Homogénéité : Le risque double si la taille du portefeuille double

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$$

- Invariance par translation : l'ajout d'une poche d'actif sans risque à un portefeuille risqué ne fait que traduire la mesure du risque

$$\rho(X + c) = \rho(X) + c$$

- Sous-additivité : cette propriété traduit la notion de diversification : le risque sur un portefeuille est plus faible que la somme des risques individuels.

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

5.2 Value at Risk (VaR)

La notion de risque, traditionnellement définie par la volatilité ne tient pas compte dans sa définition de l'asymétrie entre les gains et les pertes. La mesure de risque fait communément intervenir un niveau de probabilité, niveau sur lequel l'investisseur est particulièrement averse sur un horizon de temps donné. La VaR est une estimation de la perte potentielle (exprimée dans une unité monétaire) qui peut résulter de la

détention d'un portefeuille de produits financiers sur une période donnée (un jour, une semaine, etc.), avec un niveau de confiance choisi a priori (95 %, 99 %, etc.). La Value at Risk (VaR) est définie comme la perte maximale qui survient avec un certain niveau de probabilité que nous noterons q . Mathématiquement, cela s'écrit :

$$P[X \leq -VaR_q] = 1 - q$$

La présence du signe moins dans la définition de la VaR indique simplement que la mesure de risque est positive. Si nous retenons un seuil de confiance de 99%, la VaR 99% est la perte maximale que l'on subira dans les 99% des cas les plus fréquents. Dans le cas d'une perte qui suit une loi de fonction de répartition F sur l'horizon de temps considéré, nous en déduisons le lien direct entre la VaR et le quantile de cette loi de distribution au seuil q :

$$VaR_q = -F^{-1}(1 - q)$$

Dans le cas d'une perte qui suivrait une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ , nous obtenons la relation suivante :

$$VaR_q = -\mu + \sigma N^{-1}(1 - q)$$

Cette relation est remarquable car la VaR est toujours proportionnelle à l'écart-type des pertes, et ce quel que soit le niveau de confiance retenu.

Pour revenir aux axiomes des cohérence, la VaR n'est pas une mesure de risque cohérente car elle n'est pas sous-additive, comme l'illustre l'exemple suivant. Soit un univers composé de 4 états du monde de probabilités respectives 1%, 49%, 49% et 1%. On considère une banque qui vend un call et un put. Les payoffs dans les 4 états du monde sont les suivants pour ces options :

$$\text{Call} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Put} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La VaR à 98% de chaque instrument du portefeuille est nulle mais celle du portefeuille global est égale à 8. Notons que la propriété de sous-additivité est violée à cause de la conjonction de deux facteurs : l'univers des états du monde est fortement discontinu et le seuil est précisément choisi pour violer la sous-additivité. Il est très rare de se retrouver dans une situation similaire dans le cas d'un portefeuille réel.

5.3 Estimation de la VaR

Les organismes de tutelle des établissements financiers imposent un seuil de confiance de 99%, de sorte que la perte observée ne devrait excéder statistiquement la VaR dans 1% des cas seulement. Par ailleurs, la période de détention de 10 jours imposée par la réglementation bancaire correspond au délai estimé nécessaire pour retourner la position dans le marché.

Ainsi, la VaR sur 10 jours à 99% n'est autre que le quantile d'ordre 1% de la distribution de probabilité des variations sur 10 jours de la valeur de marché d'un portefeuille. Calculer la VaR revient donc à

estimer un quantile de cette distribution. Trois méthodes d'estimation couramment utilisées en statistique permettent d'estimer la VaR : la méthode historique s'appuyant sur des données observées, la méthode paramétrique utilisant un modèle donné afin d'en déduire des formules fermées et la méthode de simulation dite de Monte Carlo.

5.3.1 VaR historique

Dans cette méthode, la distribution des variations futures des facteurs de risque est assimilée à celle observée sur une période passée. On utilise donc les variations passées pour réévaluer le portefeuille et simuler ses pertes et profits (profit and loss ou P&L). La VaR est ensuite obtenue en lisant le quantile approprié sur l'histogramme des rentabilités simulées. Sur un historique de 500 P&L quotidiens d'un portefeuille (ce qui représente un historique de deux ans), la VaR à un jour à 99% de ce portefeuille est tout simplement égale à la cinquième plus basse variation observée dans l'historique.

Ce calcul ne nécessite qu'un historique des cours de l'instrument ou des facteurs de risque sur une période donnée, sans qu'aucune hypothèse a priori sur la distribution des variations des facteurs de risque ne soit nécessaire. L'avantage de cette méthode est de prendre en compte parfaitement les distributions de rendements des actifs du portefeuille ainsi que leur dépendance. Son point faible est que les historiques sont en général de taille très limitée ou, s'ils sont de grande taille, on peut s'interroger sur la pertinence d'utiliser des données historiques très anciennes pour appréhender un risque futur.

5.3.2 VaR paramétrique

Cette méthode repose sur l'hypothèse que la loi jointe des facteurs de risque peut être approchée par une loi théorique a priori dont l'expression mathématique dépend d'un nombre réduit de paramètres. On utilise alors les propriétés de cette loi théorique pour estimer le quantile de la distribution et donc la VaR d'une position ou d'un portefeuille.

En raison de sa simplicité, on utilise souvent la loi normale, qui est complètement caractérisée par deux paramètres : sa moyenne et sa matrice de variance-covariance. Lorsque la variation de la valeur de marché d'une position s'exprime comme combinaison linéaire des variations des facteurs de risque, les propriétés de la loi normale permettent le calcul immédiat de la volatilité de la position à partir de la matrice de variance-covariance des facteurs de risque. Le quantile d'ordre q et donc la VaR, est une fonction linéaire de cette volatilité. Malheureusement, l'utilisation de l'approximation gaussienne conduit à sous-estimer, parfois dramatiquement, la VaR réelle.

On peut alors spécifier d'autres lois pour les facteurs de risque, en particulier pour tenir compte de l'épaisseur des queues de la distribution de la plupart des variables financières. Malheureusement les formules deviennent plus compliquées et il devient plus difficile de rendre compte avec justesse des dépendances entre les variables.

5.3.3 VaR Monte-Carlo

L'estimation de la VaR par simulations de Monte Carlo présente des points communs avec l'approche historique et la méthode paramétrique. Dans un premier temps, on spécifie la distribution jointe des facteurs de risque. Puis, on engendre à partir de cette loi, un très grand nombre de scénarios de variations des facteurs de risque. Ces scénarios sont ensuite utilisés pour calculer les résultats hypothétiques du portefeuille. La VaR est enfin déterminée de la même manière que la VaR historique mais à partir de l'échantillon simulé.

Bien que simple dans son principe, cette méthode nécessite une grosse capacité de calcul. Le nombre de simulations à effectuer croît très vite avec la complexité des produits et le nombre de tirages devient rapidement très important si l'on souhaite obtenir une précision acceptable.

5.3.4 Problèmes des données historiques

Quelle que soit la méthode utilisée, le calcul de la VaR nécessite des données historiques, que ce soit pour disposer de scénarios sur les facteurs de risque ou pour estimer les paramètres de la loi spécifiée pour ces facteurs. Une difficulté majeure concerne le choix de la longueur de la période historique utilisée dans l'estimation. Si l'on accepte l'hypothèse de stationnarité des facteurs de risque, le calcul de la VaR est d'autant plus précis que l'historique dont on dispose est long.

Cependant, de nombreuses études empiriques portant sur les variables financières montrent l'alternance de périodes de forte volatilité des marchés et de périodes plus calmes. Ainsi, non seulement une des hypothèses sous-jacentes à l'estimation de la VaR n'est pas vérifiée mais la VaR calculée sur un historique trop long peut être fortement biaisée et ne pas refléter les niveaux de volatilité du moment.

On est alors confronté à des exigences contradictoires. Comment déterminer dans ces conditions la longueur optimale de la période à utiliser pour le calcul de la VaR, sachant que les organismes de tutelle impose une période historique minimale d'une année? Ce problème est quelquefois contourné en pondérant les observations pour donner plus de poids aux périodes plus récentes.

5.4 Autres mesures de risque

5.4.1 Expected shortfall

Il existe d'autres mesures de risque qui sont cohérentes au sens des axiomes de cohérence des mesures de risque. C'est le cas de l'expected shortfall. Il s'agit d'une mesure de risque associée à un seuil de probabilité mais qui mesure l'espérance de la valeur du portefeuille dans les cas associés à ce seuil de probabilité :

$$ES_q = E[-X | X \leq -VaR_q]$$

Dans le cas de la gaussienne, l'expected shortfall et la VaR sont numériquement très proches pour de niveaux de confiance éloignés ; en effet :

$$ES_q = -\frac{\int_{-\infty}^{N^{-1}(1-q)} x n(x) dx}{1-q} = -\frac{n(N^{-1}(1-q))}{1-q} = -\frac{n(-VaR_q)}{N(-VaR_q)} \sim VaR_q$$

Ce n'est en revanche pas le cas si la variable considérée suit une loi à queue épaisse, telle la loi de Pareto par exemple. Dans ce cas, la fonction de répartition s'écrit $F(x) = C|x|^{-\alpha}$, avec $\alpha > 2$, et la VaR est égale à :

$$VaR_q = -F^{-1}(1-q) = \left(\frac{C}{1-q}\right)^{1/\alpha}$$

Il vient alors pour l'expected shortfall :

$$ES_q = -\frac{\int_{-\infty}^{-VaR_q} dx x \alpha C|x|^{-\alpha-1}}{1-q} \sim VaR_q + \frac{1}{\alpha-1} VaR_q$$

Dans le cas d'une queue épaisse, l'expected shortfall est sensiblement différent de la VaR, alors que dans le cas d'une queue gaussienne l'expected shortfall converge vers la VaR pour des seuils élevés. Nous avons vu que la VaR était une mesure de risque " locale " puisqu'elle n'utilise la fonction de répartition qu'au seuil considéré. En revanche, l'expected shortfall utilise toute la fonction de répartition au-delà du seuil considéré, et prend donc en compte toute l'information que nous avons sur la loi de la variable aléatoire au-delà du seuil. En ce sens, nous pouvons considérer que l'expected shortfall est une mesure de risque meilleure que la VaR.

5.4.2 Drawdowns

Il existe d'autres mesures de risque associées aux aspects temporels du risque. En supposant que le prix initial d'un actif est S_0 , quelle est la probabilité que le pire prix atteint dans le futur soit égal à S_{min} , et combien de temps va durer ce " drawdown " (combien de temps va s'écouler entre l'atteinte du min et le retour au nouveau initial) ? Même si un investissement est mené sur le long terme, l'investisseur a besoin d'estimer son risque de court terme, et il faut introduire dans l'analyse les aspects temporels du risque. Une façon de le faire est de considérer la distribution des drawdowns, définis à la date t par :

$$D(t) = \frac{\max_{s \in [0,t]} W_s}{W_t}$$

où W_t est la valeur du portefeuille à la date t . Il faut remarquer que ceci est plus un risque d'opportunité qu'un risque de perte puisque le drawdown est défini par rapport au maximum est non par rapport à la richesse initiale. Le drawdown est aussi appelé VaR sans horizon puisqu'il décrit la perte sur un horizon non spécifié à l'avance. Il décrit également la frustration de l'investisseur forcé de liquider sa position en dessous du maximum qu'il avait atteint dans le passé. Il faut remarquer également que le drawdown n'est pas une mesure de risque cohérente (elle n'est pas sous-additive). Dans le cas d'une marche aléatoire multiplicative (comme le processus lognormal par exemple), on peut montrer que la distribution des drawdowns est une loi de puissance. Appelons $\pi(x)$ la distribution des rendements de richesse :

$$\pi(x) = P[\ln(W_{t+1}/W_t) = x]$$

On montre dans la limite stationnaire, que la loi de distribution de la variable $D(t)$ suit une loi de puissance, et en écrivant l'équation maîtresse de cette loi de probabilité dans la limite stationnaire, nous obtenons l'équation d'auto-consistance satisfaite par le paramètre de queue de cette loi :

$$P(D > x) \sim \frac{1}{x^\Gamma} \quad \text{avec} \quad \int dx \pi(x) e^{-\Gamma x} = 1$$

Dans le cas d'un processus lognormal, on obtient $\Gamma = 2\mu/\sigma^2$.

5.4.3 Temps de retour

Soit R la rentabilité d'un actif. Formellement, la durée de retour d'un événement r est le temps moyen qu'il faut attendre pour que la variable R atteigne ou dépasse le niveau r . Soit τ le premier instant où R dépasse r . En temps discret, si les rentabilités sont indépendantes, la probabilité que τ soit égal à une date donnée u est le produit des probabilités que R soit inférieur à r pendant les $u - 1$ premières dates et supérieur à r à la date u . Si F_R est la fonction de répartition de R , on obtient :

$$\begin{aligned} P(\tau = u) &= F_R^{u-1}(r) [1 - F_R(r)] \\ E(\tau) &= \sum_{u \geq 1} u P(\tau = u) \\ E(\tau) &= \sum_{u \geq 0} (u + 1) F_R^u(r) - \sum_{u \geq 1} u F_R^u(r) \\ E(\tau) &= \sum_{u \geq 0} F_R^u(r) = \frac{1}{1 - F_R(r)} \end{aligned}$$

5.4.4 Cadre général des mesures de risque cohérentes

Un moyen général de définir de "bonnes" mesures de risque consiste à introduire une distorsion des fonctions de répartition. Si $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction croissante telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$, on définit la fonction de répartition distordue. On définit alors la mesure de risque :

$$\rho(X) = E^*[X] = E[X\varphi(X)] = - \int_{-\infty}^0 dx g(F(x)) + \int_0^{\infty} dx [1 - g(F(x))]$$

où la fonction φ est la dérivée de Radon-Nikodym correspondant à la distorsion de la mesure de probabilité. Un théorème indique que si la fonction g est également concave (c'est-à-dire que g est continue puisqu'elle est croissante), alors la mesure de risque induite ρ est sous-additive et donc cohérente. Dans le cas de la VaR, on a :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < VaR \\ 1 & \text{si } x \geq VaR \end{cases}$$

Cette fonction est discontinue au niveau de la VaR, ce qui indique qu'il ne s'agit pas d'une mesure de risque cohérente. Dans le cas de l'expected shortfall, on montre aisément que la fonction g est continue et s'écrit :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < VaR \\ \frac{x - VaR}{1 - VaR} & \text{si } x \geq VaR \end{cases}$$

Toutefois, dans le cas de l'expected shortfall, la fonction g , tout en étant continue, n'est pas différentiable au point $x = VaR$. Pour tout $x < VaR$, la fonction de distorsion g est égale à 0, c'est-à-dire que l'information contenue au niveau de la fonction de répartition des pertes sur cette région n'est pas utilisée dans la mesure de risque définie par l'expected shortfall. Une fonction de distorsion différentiable sur l'ensemble des réels tout entier permettrait de définir une mesure de risque qui serait non seulement cohérente du point de vue des axiomes de risques, mais également qui utiliserait toute l'information sur la répartition de la variable aléatoire. La transformation suivante, appelée transformée de Wang, satisfait cette propriété :

$$g_\lambda(x) = N [N^{-1}(x) - \lambda]$$

Une propriété remarquable des mesures de risque obtenues par distorsion de la fonction de répartition est qu'on peut les réexprimer comme une somme pondérée de Value at Risk à différents niveaux de confiance. En effet, si on se place dans l'espace des quantiles de la variable aléatoire X plutôt que dans l'espace direct de cette variable aléatoire, c'est-à-dire si on pose $\alpha = F(x)$, on obtient :

$$\rho(X) = E[X\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) dF(x) = \int_0^1 d\alpha \tilde{\varphi}(\alpha) VaR_\alpha$$

avec $\tilde{\varphi}(\alpha) = \varphi(F^{-1}(\alpha))$.

5.5 Contributions au risque

Le cas le plus simple est celui d'un portefeuille gaussien. Dans ce cas, la mesure naturelle du risque est l'écart-type du P&L. Nous notons x_i la pondération de la ligne i dans le portefeuille et μ_i et σ_i désignent respectivement le rendement espéré et l'écart-type du rendement sur la ligne i . Les corrélations deux à deux sont ρ_{ij} . La formule de l'espérance et de la variance du P&L sur l'horizon considéré est :

$$E[P\&L] = \sum_i x_i \mu_i$$

$$\text{var}[P\&L] = \sum_i x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} x_i x_j \sigma_i \sigma_j$$

Il se trouve que la somme des covariances de chaque ligne avec le rendement total du portefeuille est égale à la variance elle-même. Nous en déduisons une formule très simple de la contribution de chaque ligne du portefeuille à la variance totale :

$$Cb_i = \frac{\text{cov}(P\&L_i, P\&L)}{\text{var}(P\&L)} \sqrt{\text{var}(P\&L)}$$

La formule $\sum_i Cb_i = \text{var}(P\&L)$ est toujours vraie, même si les lois de rendements ne suivent pas une fonction gaussienne multivariée. La contribution à la variance est la covariance calculée par la formule ci-dessus. Dans le cas général, la contribution calculée en covariance permet à coup sûr de répartir le risque total du portefeuille sur chaque ligne.

$$Cb_i = \frac{\text{cov}(P\&L_i, P\&L)}{\text{var}(P\&L)} \sqrt{\rho(P\&L)}$$

Toutefois, il existe une infinité de façons de faire ceci, et le choix de la covariance bien qu'inspiré du cas gaussien est tout à fait arbitraire et ne se justifie que par la simplicité de calcul de cette grandeur

d'un point de vue numérique, comme nous le verrons ci-dessous. La propriété d'homogénéité de degré 1 des mesures de risque cohérentes permet, via la formule d'Euler, de calculer la formule générale des contributions au risque. On obtient en effet :

$$\rho(x_1, \dots, x_N) = \sum_i x_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \sum_i C b_i$$

Ainsi, la contribution marginale d'une ligne du portefeuille au risque total est la dérivée de la mesure de risque du portefeuille par rapport à la taille marginale de la ligne en question. C'est aussi l'augmentation du risque total du portefeuille pour une augmentation de 1 euro de la taille de la ligne considérée.

Il existe une autre grandeur intéressante dans l'analyse du risque d'un portefeuille ; il s'agit de la contribution incrémentale d'une ligne, c'est-à-dire de l'augmentation du risque total du portefeuille si on lui rajoute cette ligne. La formule de la contribution incrémentale est donc :

$$\rho_{\text{incr}}(i) = \rho(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) - \rho(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_N)$$

Dans la limite, où la taille de la ligne considérée devient infinitésimale par rapport à la taille du portefeuille, les deux grandeurs, contribution marginale et contribution incrémentale convergent. En revanche, on a toujours une relation d'ordre entre les deux : la contribution marginale est toujours supérieure à la contribution incrémentale. L'intuition de ce résultat est que rajouter une ligne à un portefeuille aura tendance à le diversifier alors que rajouter 1 euro à une ligne déjà existante aura tendance à le concentrer sur la ligne i . La démonstration de ce résultat tient à la convexité des mesures cohérentes de risque, convexité provenant des propriétés de sous additivité et d'homogénéité. Pour simplifier les notations, la fonction $\rho(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N)$ sera notée simplement $\rho(x_i)$, les $N - 1$ autres variables restant inchangées. Nous avons :

$$\begin{aligned} 2\rho(x_i) &= \rho((x_i + dx_i) + (x_i - dx_i)) && \text{propriété d'homogénéité} \\ &\leq \rho(x_i + dx_i) + \rho(x_i - dx_i) && \text{propriété de sous-additivité} \end{aligned}$$

On en déduit alors que la mesure de risque est convexe en fonction des pondérations du portefeuille, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_N) \geq 0$$

Par conséquent, on peut développer la contribution incrémentale du risque au deuxième ordre :

$$\rho(x_i) - \rho(0) \sim x_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(x_i) - \frac{1}{2} x_i^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}(x_i) \leq x_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i}(x_i)$$

La concavité de la mesure de risque indique que l'euro marginal d'exposition sur la ligne i coûte plus cher que le premier euro. En effet, ceci est intuitif sur le plan financier car le premier euro de la ligne i va plus diversifier le portefeuille que les euros suivants.

Le cas de la contribution à la VaR est instructif et très utile en pratique. Il est en général numériquement très compliqué de calculer la dérivée de la VaR par rapport à l'exposition sur chaque ligne. Par ailleurs, nous avons vu l'utilisation d'une formule de type covariance n'était pas fondée sur des arguments solides,

et il y a des cas où cette utilisation de la VaR conduit à des contributions supérieures au risque maximal sur la ligne elle-même ! Dans le cas où la mesure de risque est la VaR, on démontre le résultat suivant :

$$Cb_i = E[P\&L_i | P\&L = VaR]$$

Pour démontrer ce résultat, nous considérons un portefeuille qui est la somme de deux sous-portefeuilles, dont les P&L sont décrits par les variables X et ϵY respectivement. Nous appelons $f(x, y)$ la densité jointe des variables X et Y . Les quantiles du P&L du portefeuille au seuil α en fonction du poids de la ligne modélisée par la variable Y est défini par :

$$P[X + \epsilon Y > Q(\epsilon, \alpha)] = \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{Q(\epsilon, \alpha) - \epsilon y}^{\infty} f(x, y) dx \right] dy$$

En dérivant par rapport à ϵ , nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial Q(\epsilon, \alpha)}{\partial \epsilon} - y \right] f(Q(\epsilon, \alpha) - \epsilon, y) dy = 0$$

Ce qui donne immédiatement :

$$\frac{\partial Q(\epsilon, \alpha)}{\partial \epsilon} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y f(Q(\epsilon, \alpha) - \epsilon, y) dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(Q(\epsilon, \alpha) - \epsilon, y) dy} = E[Y | X + \epsilon Y = Q(\epsilon, \alpha)]$$

Intuitivement, cette formule signifie que la contribution à la VaR de chaque ligne du portefeuille est l'espérance du P&L de chaque ligne conditionnellement au fait que le P&L du portefeuille soit exactement à son seuil de VaR.

Exemple du portefeuille gaussien homogène

Considérons un portefeuille de trading de N lignes. Le rendement de chaque ligne du portefeuille sur un horizon de temps donné est noté R_i et suit une loi normale centrée et de variance $\sigma_i^2 = \sigma^2$. Le poids de chaque ligne du portefeuille est $x_i = 1/N$ (si bien que la taille globale du portefeuille est 1), et les corrélations deux à deux des rendements sont toutes identiques $\rho_{ij} = \rho$. L'espérance de rendement de ce portefeuille, par linéarité de l'espérance est égale à 0. Sa variance est quant à elle égale à :

$$\sigma_P^2 = \sum_i x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} x_i x_j \sigma_i \sigma_j = \frac{\sigma^2}{N} + \frac{N-1}{N} \rho \sigma^2$$

La VaR au seuil q s'écrit : $VaR_q = -\sigma_P N^{-1} (1 - q)$. La contribution à cette VaR de la ligne numéro i vaut :

$$Cb_i = \frac{\text{cov}(R_i, \sum_j R_j)}{\sigma_P^2} VaR_q = \frac{VaR_q}{N}$$

Le capital incrémental de la ligne numéro i vaut :

$$\rho_{\text{incr}}(i) = -N^{-1} (1 - q) \left[\sqrt{N\sigma^2 + N(N-1)\rho\sigma^2} - \sqrt{(N-1)\sigma^2 + (N-1)(N-2)\rho\sigma^2} \right] / N^2$$

5.6 Profils non linéaires

Le cas des portefeuilles optionnels est également instructif à cause des effets de convexité induits par la non linéarité des payoffs d'options. Il est possible d'obtenir une valeur approchée de la VaR du portefeuille en fonction de celle des facteurs de risque sous-jacents en développant le prix des instruments non linéaires au deuxième ordre en gamma. Considérons un portefeuille optionnel dont l'unique facteur de risque sous-jacent (par exemple la valeur d'un indice) est appelé S . Sous l'effet d'un choc sur ce facteur de risque, le portefeuille aura une variation :

$$\delta\Pi = \Delta \delta S + \frac{1}{2} \Gamma \delta S^2$$

Dans cette expression δS , est le choc sur le facteur de risque, Δ est la sensibilité du portefeuille au facteur de risque et Γ est sa convexité. La VaR sur le portefeuille peut-être calculée à partir de la VaR sur le facteur de risque sous-jacent. Par ailleurs, nous voyons que si le portefeuille est Γ -positif, la perte sur un portefeuille atteint un maximum pour $\delta S = -\Delta/\Gamma$ et que la perte maximale sur ce portefeuille est $-\Delta^2/2\Gamma$. Il faut remarquer que ces résultats reposent sur la validité du développement de Taylor à l'ordre 2 et non d'un modèle de pricing de type Black-Scholes ou autre, en dépit de l'utilisation des paramètres grecs. Dans le cas d'un portefeuille sujet à différents facteurs de risques, la formule ci-dessus devient :

$$\delta\Pi = \sum_i \Delta_i \delta S_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Gamma_{ij} \delta S_i \delta S_j$$

5.7 Mesurer n'est pas gérer

Plusieurs difficultés concernant la mesure des risques viennent limiter la portée de cet exercice. La première concerne la longueur requise des historiques. Pour avoir des résultats fiables, il faut disposer d'un historique suffisamment long. La deuxième concerne la mesure des corrélations (des dépendances) entre actifs, qui a fait l'objet de nombreux développements depuis une dizaine d'années, notamment autour de la théorie des copules. Toutefois, si la théorie des copules fournit un cadre conceptuel à la notion de dépendance, on peut estimer que les applications pratiques ne sont pas à la hauteur des développements théoriques qui ont été menés.

En s'attaquant à ces questions, il ne faut toutefois pas perdre de vue que l'objectif du gestionnaire de risques n'est pas seulement de mesurer les risques, mais également de les gérer.

Cette gestion passe par la mise en place d'outils de compréhension fine du risque au niveau d'un portefeuille. Parmi ceux déjà développés dans certaines institutions, citons l'identification des positions qui ont le plus fort impact sur le risque, l'analyse de la contribution marginale d'une position, l'étude des anticipations implicites contenues dans le portefeuille pour détecter les incohérences, enfin et surtout la recherche des meilleures opérations pour réduire les expositions.

Toute l'expertise de la gestion du portefeuille de la banque va consister à trouver le couple rendement / risque optimal compte tenu du projet industriel de la banque.

Chapter 6

Gestion du portefeuille bancaire

6.1 Le capital réglementaire

Afin de protéger les déposants, premiers créanciers d'une banque et afin de se prémunir contre une crise financière majeure, chaque pays s'est doté de structures indépendantes - des régulateurs - qui surveillent la bonne santé du système financier. En France, ce rôle est assuré par la Commission Bancaire qui s'assure, par des audits, que les banques nationales satisfont à la réglementation bancaire.

Le principe général de la réglementation bancaire est de requérir des réserves de la part des banques afin de couvrir les pertes éventuelles non anticipées, c'est à dire au delà de la perte attendue (la perte moyenne). Le but annoncé est double : d'une part protéger les déposants, les bailleurs de fonds des banques (et ne pas répercuter sur eux les pertes subies par la banque, créant un effet boule de neige), d'autre part créer des incitations suffisantes pour limiter les investissements risqués.

Après quelques balbutiements, une concertation à l'échelle des pays de G10 a permis de parvenir à un consensus sur des premiers accords dits de Bâle qui régissent toutes les banques du G10, les soumettant ainsi à des règles communes. L'effet a été d'augmenter le niveau de capital détenu par les banques en face de leurs engagements, sécurisant un peu plus le système financier.

Les premiers accords de Bâle (1988) ont été servis par leur simplicité, rendant leur implémentation plus aisée. Le principe est le suivant : chaque banque doit détenir un montant de capital égal à 8% du montant nominal de ses actifs. Les actifs concernés sont eux-même soumis à une pondération forfaitaire qui dépend uniquement du type de la contrepartie. Ainsi, pour un Etat Souverain membre de l'OCDE, la pondération sera de 0%, signifiant qu'aucun capital réglementaire n'est requis pour un engagement sur un pays membre de l'OCDE, par exemple la France, l'Italie, la Grèce. Si la contrepartie est une banque d'un pays de l'OCDE, la pondération est de 20% (par exemple ABN AMRO, Société Générale, etc). Pour une entreprise, la pondération est de 100%. On appelle cette pondération le Risk Weight (RW) et les actifs pondérés les Risk Weighted Assets (RWA). On a donc :

$$\text{Regulatory Capital} = 8\% \text{ RWA}$$

Faisons un calcul simple de capital réglementaire afin d'illustrer cette règle. La Société Générale a prêté 100 euros.

- 1er cas : la contrepartie est la Grèce. La pondération est de 0% et le capital réglementaire à détenir est de $8\% \times 0\% \times 100 = 0$ euro.
- 2ème cas : la contrepartie est la Deutsche Bank. La pondération est de 20% et le capital réglementaire à détenir est de $8\% \times 20\% \times 100 = 1.6$ euros.
- 3ème cas : la contrepartie est British Airways. La pondération est de 100% et le capital réglementaire à détenir est de $8\% \times 100\% \times 100 = 8$ euros.

Les accords de Bâle ont eu deux effets pervers. Premièrement, la pondération est forfaitaire et indépendante du risque réellement encouru. Deux entreprises l'une au bord de la faillite, l'autre en pleine santé seront pondérés de la même façon, ce qui pourrait pousser une banque peu prudente à prêter au plus risqué, à la recherche d'un rendement plus élevé. De même une banque Hong-Kongaise serait pondérée à 100% alors qu'une banque européenne serait pondérée à 20% fut-elle dans une situation financière délicate. Le deuxième effet pervers est qu'une pondération forfaitaire et aussi simple ne peut donner aucune incitation aux banques pour se doter de mesures de risques précises qui leur permettent de gérer efficacement leurs portefeuilles d'engagements.

Un premier amendement est apparu en ce sens en 1991, autorisant les banques à utiliser leurs modèles internes pour calculer leur capital réglementaires suivant une méthodologie VaR dont nous reparlons dans le paragraphe suivant. Enfin et tout récemment, une pondération des actifs en accords avec le risque encouru a amené une refonte du calcul du capital réglementaire désormais encadré par les accords Bâle II, entrés en application en janvier 2008, malgré l'opposition de certains pays.

6.2 La mesure interne des risques

Le capital réglementaire a été jusqu'à l'adoption des amendements de 1991 une mesure relativement sommaire. Par ailleurs, les amendements de 1991 ne concernent que les activités de marché, et non pas celles de crédit pur. Malgré la sophistication récente du calcul de capital réglementaire à travers Bâle II, celui-ci ne peut convenir comme mesure de risque satisfaisante au niveau de la banque. En effet, le capital réglementaire est une mesure additive. En conséquence, le capital réglementaire ne capture pas l'effet de diversification recherché par la banque pour équilibrer son portefeuille et que la VaR (Value at Risk) concernée par les amendements de 1991 valorise.

La VaR va donc être déclinée aux portefeuilles de crédit comme mesure de risque interne sous le nom de Credit VaR. Au contraire des activités de marché qui sont constamment valorisées, la Credit VaR sera un quantile sur la distribution des pertes sur le portefeuille de crédit et non plus un quantile sur la distribution des variations relatives de valorisation du portefeuille.

Le Capital Economique, qui correspond au montant de fonds propres idéalement engagés par la banque en face de toute opération, est la différence entre la Credit VaR et la perte moyenne sur le portefeuille, celle-ci étant couverte par la facturation des produits vendus.

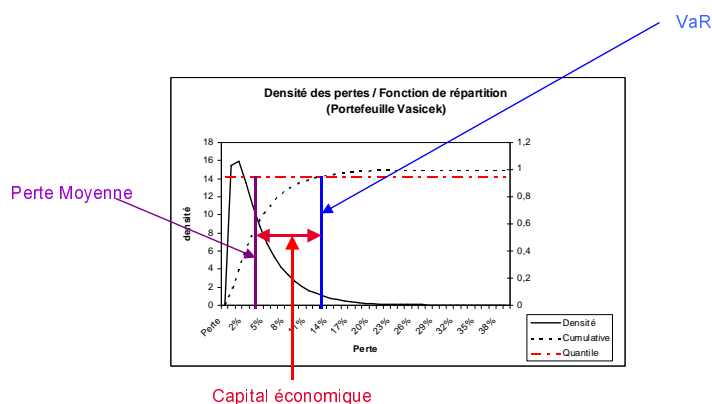


Figure 6.1: Définition du capital économique

Le rôle du capital économique est de protéger les créanciers de la banque avec un degré de confiance qui est déterminé par la direction financière de la banque. En effet, que la banque veuille s'assurer un rating A, AA ou encore AAA, le niveau de capital économique sera différent et correspondra à un fractile de perte de plus en plus proche du fractile 100%, au fur et à mesure que nous avancerons vers des ratings de bonne qualité.

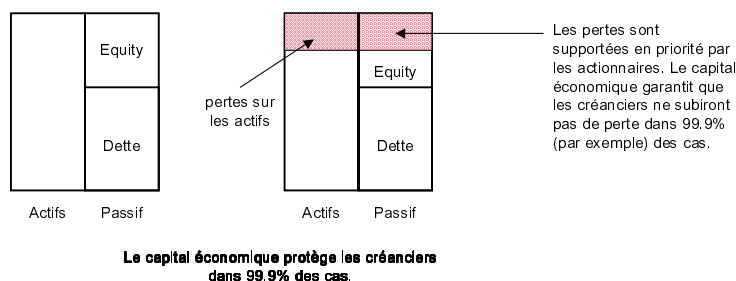


Figure 6.2: Le capital économique protège les créanciers dans 99.9% des cas

Bien que la VaR ne soit pas une mesure sous additive, la mesure de risque Capital Economique va bénéficier de l'effet diversification du portefeuille de la banque. Cette propriété notamment implique un problème d'allocation de capital économique, ou de contribution dont nous reparlons dans le paragraphe dédié aux contributions et aux mesures de performance. On observera cependant l'intérêt de diversifier le portefeuille bancaire dans les dimensions géographiques, industrielles et, plus marginalement, temporelles.

Le graphe suivant illustre l'effet diversification qui peut intervenir sur le calcul du capital économique au niveau du portefeuille. Sur ce graphe sont représentés -pour différents poids du portefeuille 1- le capital économique au niveau du portefeuille global composé des deux sous-portefeuilles P1 et P2, ainsi que $EC1 + EC2$, la somme des deux capitaux économiques qui seraient calculés sur chacun des deux portefeuilles séparément. Notons que la courbe $EC1 + EC2$ (une droite !) illustre parfaitement le calcul

du capital réglementaire sur un ensemble de sous portefeuille. Une bonne règle de gestion du portefeuille consistera donc à rechercher la répartition qui minimise le capital économique au niveau du portefeuille $P1 \cup P2$. Les mesures de performance dont nous reparlons ci-après fournissent une incitation suffisante à cela.

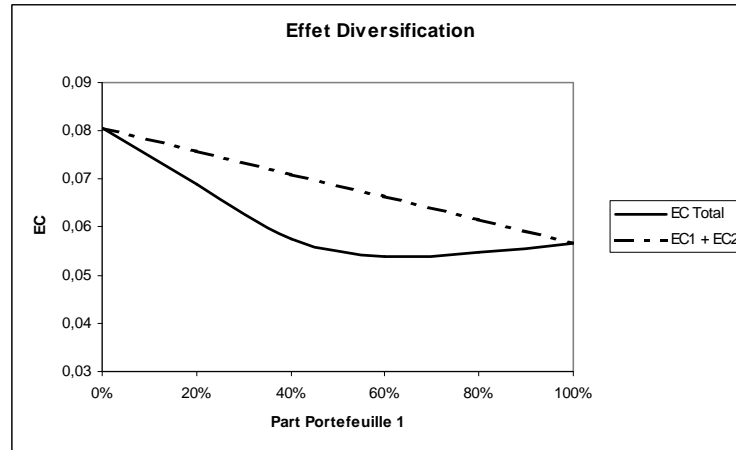


Figure 6.3: Effet diversifiant dans un portefeuille composé de deux sous-portefeuilles

Le capital disponible va guider le montant des investissements possibles pour la banque. On va donc allouer à chaque ligne métier un certain montant de capital qui lui donnera des limites quant aux opérations qu'elle peut traiter. Or, nous l'avons vu, l'effet de diversification nous amène à nous poser la question de la contribution. En effet, dans notre exemple précédent, le capital économique au niveau du portefeuille est inférieur à la somme des capitaux économiques de chaque sous portefeuille. On va donc rechercher une règle de contribution telle que :

$$\text{Capital Economique (Portefeuille)} = \sum_{\text{Sous-Portefeuilles}} \text{Contribution Sous-Portefeuille}$$

Nous présentons trois règles de répartitions possibles :

- La contribution incrémentale : cette règle permet de définir la contribution de toute nouvelle opération sur le portefeuille d'engagement de la banque. Cette contribution se définit comme :

$$\text{Contribution(Opération)} = \text{Cap Eco (Portefeuille + Opération)} - \text{Cap Eco(Portefeuille)}$$

- La contribution marginale en covariance : la répartition se fait proportionnellement à la covariance entre les pertes sur l'opération et les pertes sur le portefeuille.

$$\text{Contribution(Opération)} = \frac{\text{cov}(L_i, L)}{\text{var}(L)} \text{Cap Eco (Portefeuille)}$$

- La contribution au quantile : quand la banque fait défaut, combien ai-je perdu sur mon opération, en espérance ? La répartition au quantile est la perte moyenne sur l'opération conditionnellement au fait que la perte sur le portefeuille est égale à la perte au quantile choisi (soit perte moyenne

+ capital économique), ce qui se traduit ainsi lorsque le capital économique est calculé sur la base d'un quantile de perte à 99.9% :

$$\text{Contribution(Opération)} = E[L_i | L_{\text{Portefeuille}} = \text{Perte au quantile } 99.9\%] - E[L_i]$$

La Credit VaR n'est pas une mesure de risque additive. Il est possible de construire un exemple - certainement non-réaliste ! - pour lequel la Credit VaR sur un ensemble de deux sous portefeuilles sera supérieure à la somme des Credit VaR sur chacun des deux sous-portefeuilles. Par ailleurs, la Credit VaR ne donne que peu d'information sur la forme de la queue de distribution des pertes sur le portefeuille et ces deux considérations successives motivent la recherche d'une mesure de risque additive qui apporte un surplus d'information sur les risques extrêmes. Un candidat idéal est la Tail VaR (ou Expected Shortfall - ES) qui est la moyenne des pertes au delà de la Credit VaR :

$$ES_{\alpha} = E[L | L \geq \text{Credit VaR}(\alpha)]$$

et intègre comme nous pouvons le voir ci-dessous une information supplémentaire sur la forme de la queue de distribution par rapport à la Credit VaR.

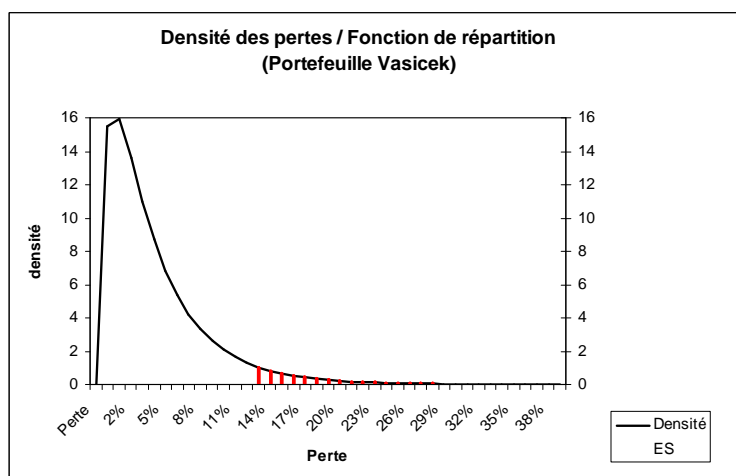


Figure 6.4: L'expected Shortfall se définit comme une perte moyenne au dessus d'un quantile pré-défini

Le capital économique est alors la différence entre la Tail VaR et la perte moyenne, soit :

$$\text{Cap Eco} = \text{Expected Shortfall} - \text{Perte Moyenne}$$

et on pourra adapter les règles de contribution vu précédemment au cas du calcul du capital économique en Expected Shortfall.

Le choix d'une règle de contribution est un enjeu majeur pour une banque. Il détermine en effet la rentabilité d'une ligne métier et influe donc sur l'allocation stratégique des ressources de la banque décidée par la direction financière.

6.3 Les mesures de performance

Une mesure de performance va permettre de réconcilier risque et profit et de comparer, sur une base commune, plusieurs portefeuilles ayant des caractéristiques différentes. Une mesure de performance intégrera donc :

- les revenus attendus
- les pertes attendues
- la mesure de risque de l'opération
- éventuellement le coût de rétribution des fonds propres

La mesure de risque choisie peut être réglementaire (le capital réglementaire) ou interne (capital économique). Les mesures de performances sont le ROE (Return On Equity), le RAROC (Risk-Adjusted Return on Capital) et l'EVA (Economic Value Added). Dans chaque cas, elle doit relier des fonds mobilisés pour couvrir des pertes (le "capital") et les revenus espérés.

L'une des mesures de performance les plus populaires est le RAROC (Risk Adjusted Return On Capital). Le RAROC se définit comme un rendement sur fonds propres et son expression est la suivante :

$$RAROC = \frac{\text{Revenus} - \text{Perte moyenne}}{\text{Capital économique}}$$

Le capital est le capital économique requis par l'opération, c'est à dire la contribution de l'opération au capital économique total requis au niveau de la banque. Le RAROC, est une mesure interne de la performance qui va permettre de sélectionner les meilleurs projets. Deux remarques s'imposent. Premièrement, le niveau de capital retenu peut être le capital réglementaire qui sera exigé par le régulateur, surtout si celui-ci s'avère plus élevé que le capital économique de l'opération. Deuxièmement, on voit ici l'importance d'une règle d'attribution "juste". En effet, une répartition en covariance pourrait par exemple pénaliser des opérations dont le capital économique requis (par une règle de répartition en covariance) serait supérieur au capital économique requis par une règle de répartition au quantile, pénalisant de fait la ligne métier impliquée dans l'opération. Une seconde conséquence serait une mauvaise orientation de la banque dans ses choix d'investissement si celle-ci avait pour objectif de maximiser son RAROC au niveau global.

Le RAROC s'exprime comme un rendement sur les fonds propres engagés par la banque dans l'opération. Il se veut donc une mesure de performance au service des actionnaires.

Dans les revenus, on pourra inclure les revenus générés par l'opération auquel on retranche les coûts sous-jacents (rétribution des intermédiaires financiers, etc). On devra donc, pour respecter le principe de mesure au service des actionnaires, retrancher aux revenus le coût de la dette. Celui-ci, en général, est faible pour une banque bien notée et sera omis de la formulation du RAROC.

Le coût de rémunération des fonds propres est, en revanche, beaucoup plus élevé. Il compense en effet un risque plus important (dans le cas d'un capital économique à 99.9%, les fonds propres doivent couvrir les

pertes dans 99.9% des cas), et les revenus générés par une opération doivent être suffisants pour couvrir ce coût. Autrement dit, une opération dont le RAROC est inférieur au coût des fonds propres n'est pas rentable. On retiendra donc les opérations telles que :

$$RAROC > k, \text{ avec } k \text{ coût des fonds propres}$$

L'ordre de grandeur du coût du capital est autour de 10% pour les banques commerciales et 15% pour les banques d'investissement. On dira que k est un hurdle rate, le seuil minimal requis pour une opération. Le pricing d'une opération (la tarification) doit en conséquence prendre en compte ce coût des fonds propres. Une opération est rentable lorsque son RAROC est supérieur au coût des fonds propres, soit :

$$RAROC - k > 0 \iff \text{Revenus} - \text{Perte moyenne} - k EC > 0$$

La quantité $(\text{Revenus} - \text{Perte moyenne} - k EC)$ mesure la richesse créée pour l'actionnaire au-delà du rendement que celui-ci exige (le coût des fonds propres) en rémunération du risque porté. Alors que le RAROC est un pourcentage, l'EVA s'exprime en euros. Comme le RAROC, l'EVA est couramment utilisé pour mesurer la pertinence d'une opération. Notons que de la même façon que nous pouvons parler de contribution au capital économique, nous pouvons également parler de contribution à l'EVA comme :

$$EVA_i = \text{Revenus}_i - \underbrace{\text{Perte moyenne}_i - k_i Cb_i}_{\text{Coût du risque}}$$

Nous avons souligné dans l'équation précédente que le coût des fonds propres diffère par ligne métier. Le calibrer est un exercice difficile et on considèrera que le coût des fonds propres est constant sur l'ensemble des activités de la banque. Par ailleurs, en raison de l'additivité des revenus et pertes moyennes, la maximisation de l'EVA incite à la minimisation du capital économique, celle-ci pouvant passer par une politique de diversification du portefeuille de la banque et de gestion du capital économique adéquate.

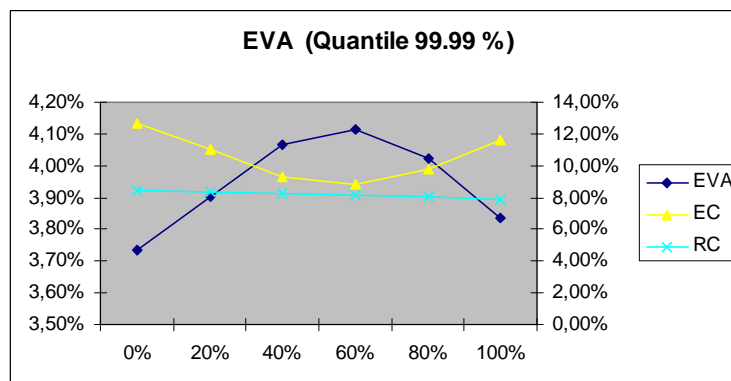


Figure 6.5: EVA et diversification. La recherche de l'EVA maximale passe par une diversification du portefeuille.

6.4 La titrisation

6.4.1 Description d'une opération de titrisation

La titrisation est une opération qui consiste à transformer des actifs en titres financiers. Les actifs concernés sont assez variés et les plus courants sont les prêts hypothécaires, les encours de cartes de crédit (US), les prêts automobiles, les prêts étudiants ou encore une classe à part : les créances commerciales.

Une entité fait l'interface entre les actifs et les titres financiers : le SPV (Special Purpose Vehicle) qui va porter à son bilan les prêts (ou autres) qui constituent le socle de l'opération de titrisation et sera financé au niveau de son passif par les titres financiers émis. Ces titres seront remboursés par les flux générés par l'amortissements des actifs titrisés.

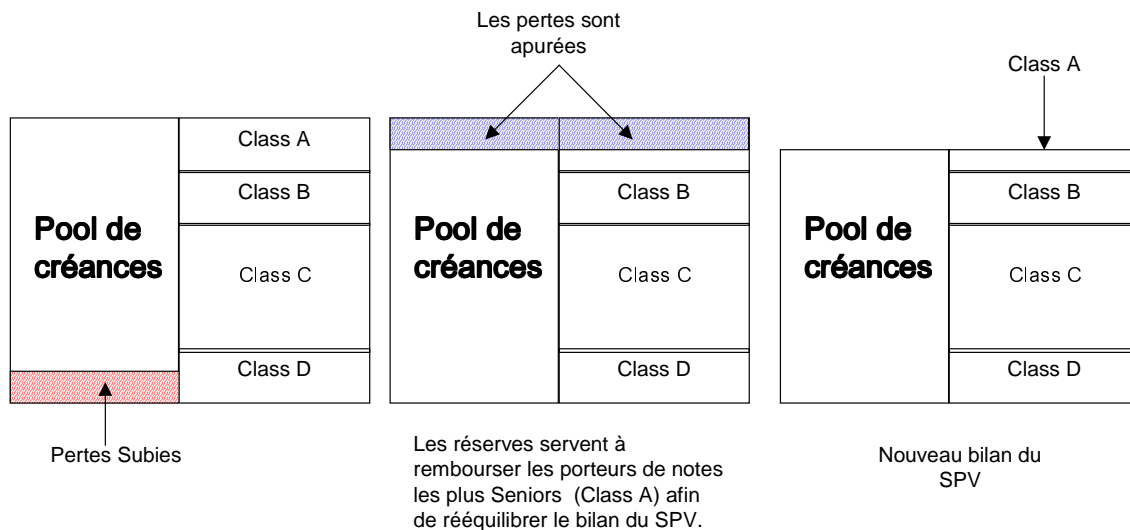
Prenons pour exemple des prêts automobiles émis par une division financière d'un constructeur automobile. Celui-ci, voulant apurer son bilan et se re-financer rapidement afin de pouvoir proposer à nouveau des conditions avantageuses à ses clients, va faire appel à un structureur qui proposera dans un même temps le rachat des créances auprès du constructeur automobile (à des conditions négociées et permettant notamment la couverture partielle des pertes à venir) et recherchera des investisseurs auprès desquels placer les titres financiers émis conformes au couple rendement/risque recherché par ceux-ci, c'est à dire un couple Spread / Rating qui sera validé par les agences de notation.

La première tranche (la plus risquée) est généralement gardée par le vendeur des créances. Pour deux raisons. Premièrement, pour une raison pratique : cette première tranche peut être gardée sous la forme d'une over-collatéralisation : le cédant (le vendeur des créances) apporte au SPV un surplus de créances non financées. Cette solution permet au cédant de ne pas monopoliser une somme fixe. Deuxièmement, la première tranche gardée par le cédant va rassurer les investisseurs sur la qualité des actifs puisqu'elle va absorber la majeure partie des pertes (ce qui permettra d'émettre des titres de meilleure qualité et d'obtenir par conséquent un coût de financement moindre). Cette première tranche incite également le cédant à rester impliqué dans la gestion des créances (notamment les impayés) bénéfique au bon déroulement de l'opération de titrisation une fois qu'elle est mise en place.

La maturité de l'opération de titrisation peut être allongée en incluant une période dite de revolving (ou rechargement en français) pendant laquelle le cédant s'engage à vendre au SPV de nouvelles créances à intervalles réguliers.

Priorité des paiements et apurement des pertes : Lorsque des pertes sont constatées sur le panier de créances et qu'une réserve est en place ou que l'excess spread est suffisant, les pertes vont être apurées de la façon suivantes. Après paiement des frais (fees) du trustee (le gérant de l'opération de titrisation), les liquidités disponibles servent à rembourser les porteurs de parts les plus prioritaires jusqu'à hauteur des pertes subies sur le pool. Ceci a pour conséquence plusieurs effets. Premièrement, on le voit, les porteurs de notes class A sont dans l'exemple suivant effectivement les mieux protégés. Deuxièmement, les porteurs de class A sont plus que les autres soumis à une incertitude sur le temps auquel leurs parts

seront remboursées, celles-ci sont remboursables par anticipation, générant un risque de réinvestissement qui se traduira par un spread plus élevé. Enfin, le niveau de protection des porteurs de class A défini comme le rehaussement de crédit va augmenter au cours de la durée de vie de la transaction.



Le réhaussement de crédit

En plus de la structure que nous venons de voir qui protège en priorité les porteurs de notes Class A, plusieurs mécanismes additionnels peuvent (et vont) être mis en place afin de protéger les investisseurs et obtenir un financement à moindre coût.

- **Réserves :** des réserves sont souvent apportées au conduit. Elles sont financées par le cédant et permettent de couvrir les premières pertes, c'est à dire rembourser les parts les plus séniors lors de défauts au sein du panier de créances. - Critères d'éligibilité : en cas d'opération revolving, des critères d'éligibilité encadrent fréquemment les conditions de rechargement, obligeant ainsi le cédant à fournir des créances de bonne qualité.
- **Triggers :** lorsque l'opération est revolving, des triggers sur le taux de défaut au sein du panier de créances peuvent stopper la période de revolving, ou modifier la cascade des flux de paiement afin de diriger ceux-ci en priorité vers des réserves complémentaires. Des triggers peuvent également être mis en place sur le rating du servicer ou du cédant.
- **Couvertures par des tiers :** des contreparties tierces peuvent assurer une partie du panier de créances, ou un type de risque. En particulier la liquidité, via la mise en place d'une ligne de liquidité. La liquidité a un statut senior, et son remboursement prime sur la couverture des pertes sur le pool de créances.

Intérêt, avantages et désavantages

L'intérêt d'une opération de titrisation pour un vendeur est principalement l'accès à une nouvelle source de financement qui (sous réserve d'une structuration efficiente) est bon marché. Par ailleurs, dans le cas

d'opération revolving, le cédant peut obtenir un financement dont la maturité moyenne est supérieure à la maturité moyenne de ses actifs.

Pour un investisseur, l'attrait est principalement un spread beaucoup plus attractif que sur le marché corporate classique. Ces spreads traduisent la complexité du produit (et son manque de transparence parfois), le manque de liquidité du marché, ainsi que l'absence de produits de couverture standards. Enfin, en raison de la possibilité de remboursements anticipés, le spread inclut une composante risque de réinvestissement non nulle.

6.4.2 La titrisation au sein d'un conduit

Certaines opérations de titrisation n'atteignent pas une taille critique qui leur ouvre les portes des marchés financiers. Ces opérations seront alors effectuées via un conduit qui rassemble plusieurs opérations de titrisation. Le conduit finance donc plusieurs opérations avec pour chacune leur structure propre et se refinance sur les marchés financiers à moindre coût. Le conduit bénéficie d'un sponsor qui amènera des protections supplémentaires aux investisseurs ayant acheté le papier commercial émis par celui-ci.

Ces protections complémentaires sont une lettre de crédit et une ligne de liquidité. Par ailleurs, et pour des besoins de déconsolidation (traitement hors-bilan), il pourra y avoir mise en place d'une First Loss vendue à des investisseurs externes qui protégera le conduit contre les toutes premières pertes après épuisement des réserves.

La lettre de crédit est une protection mise en place par le sponsor du conduit à l'attention des investisseurs. Son rôle est d'assumer les pertes sur les opérations au sein du conduit jusqu'à un certain montant. Cette protection est mutualisée dans le sens où elle est indifférente à l'origine de la perte et peut couvrir toutes les opérations du conduit.

La ligne de liquidité est une réserve qui permet le versement des intérêts aux investisseurs lorsque les collections du conduit sont insuffisantes pour assurer le montant des intérêts contractuels. Le rôle de la ligne de liquidité est étendu par rapport à une opération de titrisation classique hors-conduit. De plus en plus apparaissent avec la nouvelle réglementation (Ble II) des lignes de liquidité Fully Supported couvrant tous types de risques, l'investisseur demeurant alors en risque sur le sponsor seulement. Par exemple, pour un conduit sponsorisé par la Société Générale avec des lignes de liquidité Fully Supported, l'investisseur ne peut subir des pertes que si les pertes sur le conduit sont importantes et qu'en même temps la Société Générale est en faillite.

La lettre de crédit est une protection commune à toutes les transactions du conduit. Elle est complétée par des lignes de liquidité qui peuvent être tirées au niveau de chaque opération.

Au niveau de chaque transaction, la lettre de crédit se comporte comme une tranche mezzanine de position relativement junior. Celle-ci étant commune à toutes les transactions du conduit, elle va servir de protection efficace contre les pertes pouvant intervenir sur chacune des transactions. Si par contre les transactions présentes dans le conduit génèrent simultanément des pertes, la lettre de crédit sera

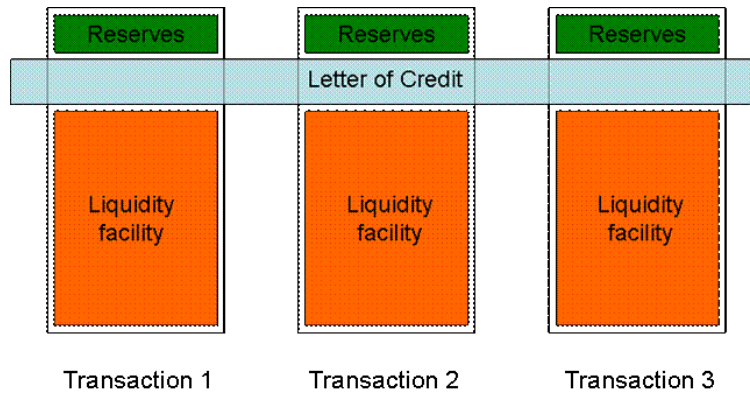


Figure 6.6: La lettre de crédit est une protection commune à toutes les transactions du conduit

rapidement saturée est des pertes devront être reportées sur les investisseurs, à moins que les transactions ne soient toutes fully supported, auquel cas le sponsor -la banque- apurera les pertes pour le compte des investisseurs.

Moyennant ces protections, les conduits émettent un papier commercial très bien noté par les agences de ratings, tout en bénéficiant de spreads élevés propres aux opérations de titrisation (et en facturant des frais de gestion). L'écart entre les spread moyen sur les transactions du conduit et le taux de refinancement sur les marchés (quelques bp au dessus des taux de référence) font des conduits des opérations lucratives.

Bibliography

- [1] Artzner, P. et al., *Coherent measures of risk*, Mathematical finance, 9, 203-228 (1999).
- [2] Arvanitis, A. and J. Gregory, *A credit risk toolbox*, Risk, December, 50-5 (1999).
- [3] BIS (2004), *International convergence of capital measurement and capital standards*.
- [4] Black, F. et Scholes, M., *The pricing of options and corporate liabilities*, The Journal of Political Economy, Vol. 81, 3, pp. 637-654 (1973).
- [5] Bluhm C., L. Overbeck and C. Wagner, *An introduction to credit risk modeling*, Chapman & Hall / CRC (2002).
- [6] Bouchaud, JP. et Potters, M., *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*, Cambridge University Press (2003).
- [7] Crouhy, M., D. Galai and R. Mark, *Prototype risk rating system*, Journal of Banking & Finance, 25, 41-95 (2001).
- [8] Crouhy, M., D. Galai and R. Mark, *Risk management*, McGraw-Hill, 2001.
- [9] Embrechts *et al.*, *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer, New-York (1997).
- [10] Gordy M. and D. Jones, *Random tranches*, Risk, March, 78-83 (2003).
- [11] Gouriéroux C., JP Laurent and O. Scaillet, *Sensitivity analysis of values at risk*, Journal of Empirical Finance 7, 225-245 (2000).
- [12] Leland, H., *Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure*, The Journal of Finance, Vol. 49, Issue 4, 1213-1252 (1994).
- [13] Matten, C., *Managing bank capital : capital allocation and performance measurement*, John Wiley & sons (1996).
- [14] Merton, R., *On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates*, The Journal of Finance, Vol. 29, Issue 2, 449-470 (1974).
- [15] Moody's (2000), *The lognormal method applied to ABS analysis*, Special report.

- [16] Ong, M., *Internal credit risk models : capital allocation and performance measurement*, Risk books (2000).
- [17] Punjabi, S., *Many happy returns*, Risk, June, pp. 71-6 (1998).
- [18] Pykhtin M. and Dev A. (2002), *Credit risk in asset securitizations: an analytical approach*, Risk, May, S16-S20.
- [19] Resnick, S.I. (1987) *Extreme Values, Regular Variation and Point Processes*, Springer, New-York.
- [20] Standard and Poor's, *Trade receivables criteria*.
- [21] Vasicek O. (1991), *Limiting loan loss probability distribution*, KMV Corporation.
- [22] Wang, S., *A Risk Measure That Goes Beyond Coherence*.
- [23] Wang, S., V.R. Young, et H.H. Panjer : *Axiomatic Characterization Of Insurance Prices*, Insurance: Mathematics and Economics, 21:173-183 (1997).
- [24] Zaik, E., J. Walter, G. Kelling and C. James, *RAROC at bank of America : from theory to practice*, Journal of applied corporate finance 9, pp.83-93 (1996).